TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TI1300: Redeneren en Logica, Practicum 1

Deadline: 17 september 2010, 10:45 uur

Introductie

In deze practicumopgave komt de stof uit colleges 1 t/m 5 aan de orde, kijk op Blackboard voor een overzicht van de bij deze colleges behorende stof in het dictaat. De bedoeling is dat je na het maken van dit practicum in staat bent om:

- formele wiskundige definities te begrijpen en erover te redeneren;
- eenvoudige wiskundige bewijzen te maken, gebruik makend van bewijstechnieken als reductio ad absurdum, contrapositie, volledige inductie, structurele inductie, en voor alle-redeneringen;
- waarheidstafels voor formules op te stellen, en voor redeneringen, en die te gebruiken om uitspraken te doen over de geldigheid van redeneringen.

Practicum maken

Je maakt het practicum **in tweetallen**. Denk indiviudeel na over wat het antwoord moet zijn, maar ook over hoe je het zou moeten opschrijven, en bespreek vervolgens je antwoorden met elkaar. Dit zijn belangrijke vaardigheden bij het leveren van overtuigende redeneringen, die je individueel moet beheersen. Op het tentamen, zowel van TI1300 als van andere gerelateerde vakken, zul je het zelf moeten doen.

Als je geen practicumpartner kunt vinden, stuur dan een mailtje naar Harmjan Treep (harmjan.treep@gmail.com), één van de student-assistenten van TI1300, met in het subject “practicum TI1300” of “practicum IN1305,” afhankelijk van welk practicum je maakt. Hij zal tweetallen samenstellen en jullie emailsgewijs met elkaar in contact brengen. Vervolgens werk je samen aan de volgende practica.

Inleveren

De uitwerking van deze opgave moet **op papier** worden ingeleverd in het postvakje “TI1300” of “IN1305,” op de 7e verdieping, bij het verlaten van de lift direct links in het keukentje, rechts onderin de kast met postvakjes. Let op dat je het juiste postvakje gebruikt. Zorg dat je ingeleverde document aan de volgende eisen voldoet:

- meerdere vellen zijn aan elkaar **vastgeniet**, dus geen snelhechters, insteekhoezen, vouwtjes, scheurtjes, paperclips, en andere fratsen.
- in elk geval **op de eerste bladzijde** staan jullie namen en studienummers en het practicumnummer,
- daaronder staan namen en studienummers van degenen met wie je overlegd hebt (indien van toepassing),
- bij iedere opgave staat het opgavenummer,
- ieder antwoord is goed leesbaar, in correct Nederlands of Engels geformuleerd en **bevat een duidelijke uitleg** in je eigen woorden van hoe je aan dat antwoord komt,
- bij ieder antwoord is voldoende lege ruimte voor de assistenten om hun opmerkingen te plaatsen en

Bij voorkeur zijn de uitwerkingen op de computer gemaakt. Dit voorkomt enerzijds onduidelijkheden door slordige correcties en anderzijds onleesbare handschriften. LaTeX is een (gratis) opmaaksysteem gespecialiseerd in teksten met veel mathematische symbolen. Op Blackboard staat instructie over het gebruik van LaTeX.

Beoordeling

Het practicum is een **verplicht** studieonderdeel dat afgerond moeten worden met een voldoende, of bij een onvoldoende het volgende jaar opnieuw gedaan moet worden. Je haalt een voldoende voor een reguliere practicumopgave als je **60% van de punten** behaalt. Voor een herkansing moet je **70% van de punten** behalen. Er zijn drie practicumopgaven die alledrie voldoende moeten zijn.

Feedback en vragenuur

Bij de beoordeling letten we op de correctheid, de duidelijkheid en volledigheid van de antwoorden. De assistenten zullen feedback op je antwoorden op je antwoordvel zetten, en ook hun initialen, zodat je weet tot wie je je met vragen kunt wenden. Bestudeer deze feedback goed, zodat je bij een volgende opgave—bijvoorbeeld op het tentamen—niet dezelfde fouten maakt. Als je tijdens het maken van een opgave vragen hebt, ergens niet uitkomt of achteraf vragen hebt over de feedback, ga dan in het **vragenuur** (dinsdagmiddag van 12:30-13:30 na het college, ook in zaal E) naar de assistenten toe. Gebruik het vragenuur niet alleen om je fouten achteraf in te zien maar ook om ze te voorkomen! We raden je aan om ook opgaven die je wel voldoende, maar niet helemaal correct hebt beantwoord, opnieuw te maken en door een medestudent te laten nakijken met behulp van de voorbeelduitwerking. Deze zal kort na de deadline op Blackboard geplaatst worden, wat overigens de reden is dat we de inleverdeadline erg strikt hanteren.

Onvoldoende

Wanneer je minder dan 60% van de punten hebt gehaald (of als je de eerste deadline niet gehaald hebt), krijg je per practicumopgave **eenmaal** de gelegenheid om toch een voldoende te halen. Je kunt zelf kiezen welke vragen van het **herkansingspracticum** je wilt maken. Per vraag telt de hoogste score van je twee pogingen. Maar je moet nu wel **70% van de punten** voor de hele practicumopgave halen. Als je een herkansing ook niet haalt heb je een onvoldoende voor het hele practicum. Je dient dan **het hele practicum** volgend jaar over te doen. Ook voor de herkansing is weer een deadline, die op de opgave en op Blackboard te vinden is.

Te laat

Als je je antwoorden **te laat** inlevert, wordt je opgave niet meer nagekeken. Je enige kans is dan nog om **alle vragen van de herkansing te maken** en daarmee **70%** te scoren. Daarna is er geen herkansing meer, dus als je deze niet haalt heb je een onvoldoende voor het hele practicum en moet je het hele practicum van dit kwartaal het volgende jaar over te doen.

Fraude

Je mag bij dit practicum met andere studenten (dan je partner) overleggen over de opgave, maar je moet samen met je partner je antwoord opschrijven, dus in jullie eigen woorden. Bovendien moet je op je uitwerking vermelden met wie je overlegd hebt. Als je je hier niet aan houdt, dan zal de examencommissie hiervan op de hoogte gesteld worden. Dat kan in het ergste geval leiden tot een jaar uitsluiting van de studie.

1. **Bewijs en tegenvoorbeeld**

   (a) (2 punten) Leg uit wat het verschil is tussen het bewijzen van een contrapositie en een bewijs uit het ongerijmde. Wees zo specifiek mogelijk.

   (b) Voor deze opgave heb je de volgende definitie nodig.
   Definitie (Kwadraatgetal)**.** *Een* kwadraatgetal *(ook wel* perfect vierkant *genoemd) is een geheel getal dat het kwadraat is van een ander geheel getal. Met andere woorden, de wortel uit een kwadraatgetal is een geheel getal.*

   Kwadraatgetallen zijn bijvoorbeeld 0, 1, 4, 9, 16, etc.

   i. (5 punten) Geef een bewijs voor de volgende stelling:
   Stelling. *Stel dat x een oneven getal is. Dan is x het verschil van 2 kwadraatgetallen.*

   ii. (3 punten) Voor deze opgave heb je de volgende definitie nodig.
   Definitie (Deelbaar)**.** *Een geheel getal a is* deelbaar door *een geheel getal b wanneer er een geheel getal k bestaat zodanig dat $a = kb$. We zeggen dan ook wel: b deelt a en schrijven $b \mid a$.*
   Bepaal of de volgende beweringen waar of onwaar zijn. Als je denkt dat een bewering waar is, geef een bewijs, en als je denkt dat hij onwaar is, geef dan een tegenvoorbeeld, en beargumenteer hoe dat de onwaarheid aantoont.
   Bewering. *Stel dat $a \mid b$ en $a \mid b + c$. Dan geldt dat $a \mid c$.*

   iii. (3 punten)
   Bewering. *Stel dat $a \mid b$ en $a \mid b \cdot c$. Dan geldt dat $a \mid c$.*

   (c) (5 punten) Beschouw de volgende definitie.
   Definitie (Palindroomgetal)**.** *Een palindroomgetal is een getal dat van links naar rechts bezien hetzelfde is als van rechts naar links bezien.*

   Het getal 13631 is bijvoorbeeld een palindroomgetal. Geef nu een bewijs van de volgende stelling.
   Stelling. *Stel dat x een 4-cijferig palindroomgetal is. Dan geldt $11 \mid x$.*

2. **Inductie**

   (a) (4 punten) Geef een bewijs met inductie voor de volgende stelling.
   Stelling. *Voor alle natuurlijke getallen $n \geq 1$ geldt*

   $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

   (b) (2 punten) Beschouw de volgende stelling:
   Bewering. *In elke groep paarden van omvang $n \geq 1$ hebben alle paarden dezelfde kleur. Met andere woorden: Alle paarden hebben dezelfde kleur.*

   Wat is er fout aan het volgende bewijs van deze bewering?

   Bewijs (met inductie).

   Basis ($n = 1$): Als er maar één paard is, is er maar één kleur, dus voor 1 paard geldt de stelling.

   Inductiestap: Te bewijzen is dat als alle paarden in een groep van n paarden dezelfde kleur hebben, ook alle paarden in een groep van $n + 1$ paarden dezelfde kleur hebben.
   Stel dus dat in groepen van n paarden er maar één kleur voorkomt (de inductiehypothese). Beschouw nu een groep van $n+1$ paarden, en nummer deze paarden $1, 2, 3, \ldots, n, n+1$. Zowel de groep $1, 2, 3, \ldots, n$ als de groep $2, 3, 4, \ldots, n, n + 1$ bestaat uit n paarden, dus volgens de IH komt er in beide groepen maar één kleur voor. Maar de groepen overlappen, dus moet dat in beide groepen dezelfde kleur zijn, en zo hebben alle $n + 1$ paarden dezelfde kleur.

   Volgens het principe van inductie hebben nu de paarden in alle groepen paarden dezelfde kleur, oftewel: alle paarden hebben dezelfde kleur. QED

   (c) **Structurele Inductie**

   i. (2 punten) Geef een recursieve definitie van de functie $p : PROP \to \mathbb{N}$, die aan elke formule $F \in PROP$ het aantal propositiesymbolen in F toekent.

ii. (2 punten) Geef een recursieve definitie van de functie $t : PROP \to \mathbb{N}$, die aan elke formule $F \in PROP$ het aantal 2-plaatsige connectieven in F toekent.

iii. (4 punten) Bewijs met structurele inductie over $PROP$ de volgende stelling.
Stelling. *Voor alle formules $F \in PROP$ geldt dat $p(F) = t(F) + 1$.*

3. **Waarheidstafels**

(a) (2 punten) Toon met behulp van een waarheidstafel aan dat de volgende redenering ongeldig is.

premisse 1:	De aarde is plat of de aarde is rond
premisse 2:	Als Beatrix de koningin van België is, is de aarde plat
premisse 3:	Beatrix is de koningin van België
conclusie:	De aarde is niet rond

Gebruik geschikte symbolen om elke atomaire propositie te representeren, en geef duidelijk aan welk symbool waarvoor staat. Leg ook duidelijk uit hoe de waarheidstafel de onwaarheid van de redenering aantoont.

(b) (2 punten) Waar precies zit de discrepantie tussen de natuurlijke taal en de taal van de propositielogica, die maakt dat deze redenering onwaar is terwijl dat in natuurlijke taal niet zo lijkt?

(c) (2 punten) Geef een formule uit $PROP$ die, wanneer hij *als premisse* aan de redenering wordt toegevoegd, maakt dat de redenering waar is. Alle propositievariabelen die je bij vraag (i) hebt geïntroduceerd moeten in je formule voorkomen.

4. **Meta-beweringen**

Bepaal of de volgende beweringen waar of onwaar zijn. Als een bewering waar is, geef er dan een bewijs voor, als een bewering onwaar is, geef dan een tegenvoorbeeld in de vorm van specieke formules uit $PROP$ waar de metavariabelen voor staan, en beargumenteer hoe dat tegenvoorbeeld de onwaarheid van de bewering aantoont.

(a) (3 punten)
Bewering. *Voor alle formules A en B geldt: Als* $\models \neg A \to \neg B$ *dan* $\models A \vee \neg B$.

(b) (3 punten)
Bewering. *Voor alle formules A en B geldt: Als* $\models \neg A \to \neg B$ *dan* $[\ \models A \quad \bigvee \quad \models \neg B\ ]$.

(c) (3 punten)
Bewering. *Voor alle formules A en B geldt: Als* $\models \neg A$ *dan* $\sim\models A$.

(d) (3 punten)
Bewering. *Voor alle formules A en B geldt: Als* $\sim\models A$ *dan* $\models \neg A$.