TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TI1300: Redeneren en Logica, Herkansing 1

Deadline: 24 september 2010, 10:45 uur

Introductie

In deze practicumopgave komt de stof uit colleges 1 t/m 5 aan de orde, kijk op Blackboard voor een overzicht van de bij deze colleges behorende stof in het dictaat. Omdat dit een herkansing is, moet je **70%** van het totaal aantal punten behalen voor een voldoende.

Practicum maken

Je maakt het practicum **in tweetallen**. Denk individueel na over wat het antwoord moet zijn, maar ook over hoe je het zou moeten opschrijven, en bespreek vervolgens je antwoorden met elkaar. Dit zijn belangrijke vaardigheden bij het leveren van overtuigende redeneringen, die je individueel moet beheersen. Op het tentamen, zowel van TI1300 als van andere gerelateerde vakken, zul je het zelf moeten doen.

Als je geen practicumpartner kunt vinden, stuur dan een mailtje naar Harmjan Treep (harmjan.treep@gmail.com), één van de student-assistenten van TI1300, **met in het subject "practicum TI1300" of "practicum IN1305,"** afhankelijk van welk practicum je maakt. Hij zal tweetallen samenstellen en jullie emailsgewijs met elkaar in contact brengen. Vervolgens werk je samen aan de volgende practica.

Inleveren

De uitwerking van deze opgave moet **op papier** worden ingeleverd in het postvakje "TI1300" of "IN1305," op de 7e verdieping, bij het verlaten van de lift direct links in het keukentje, rechts onderin de kast met postvakjes. Let op dat je het juiste postvakje gebruikt. Zorg dat je ingeleverde document aan de volgende eisen voldoet:

- meerdere vellen zijn aan elkaar **vastgeniet**, dus geen snelhechters, insteekhoezen, vouwtjes, scheurtjes, paperclips, en andere fratsen.
- in elk geval **op de eerste bladzijde** staan jullie namen en studienummers en het practicumnummer, alsmede de **vakcode** waarvoor je het practicum maakt,
- daaronder staan namen en studienummers van degenen met wie je overlegd hebt (indien van toepassing),
- bij iedere opgave staat het opgavenummer,
- ieder antwoord is goed leesbaar, in correct Nederlands of Engels geformuleerd en **bevat een duidelijke uitleg** in je eigen woorden van hoe je aan dat antwoord komt,
- bij ieder antwoord is voldoende lege ruimte voor de assistenten om hun opmerkingen te plaatsen.

Bij voorkeur zijn de uitwerkingen op de computer gemaakt. Dit voorkomt enerzijds onduidelijkheden door slordige correcties en anderzijds onleesbare handschriften. LaTeX is een (gratis) opmaaksysteem gespecialiseerd in teksten met veel mathematische symbolen. Op Blackboard staat instructie over het gebruik van LaTeX.

Beoordeling

Het practicum is een **verplicht** studieonderdeel dat afgerond moeten worden met een voldoende, of bij een onvoldoende het volgende jaar opnieuw gedaan moet worden. Je haalt een voldoende voor een reguliere practicumopgave als je **60% van de punten** behaalt. Voor een herkansing moet je **70% van de punten** behalen. Er zijn drie practicumopgaven die alledrie voldoende moeten zijn.

Feedback en vragenuur

Bij de beoordeling letten we op de correctheid, de duidelijkheid en volledigheid van de antwoorden. De assistenten zullen feedback op je antwoorden op je antwoordvel zetten, en ook hun initialen, zodat je weet tot wie je je met vragen kunt wenden. Bestudeer deze feedback goed, zodat je bij een volgende opgave—bijvoorbeeld op het tentamen—niet dezelfde fouten maakt. Als je tijdens het maken van een opgave vragen hebt, ergens niet uitkomt of achteraf vragen hebt over de feedback, ga dan in het **vragenuur** (dinsdagmiddag na het college, van 12:30-13:30 in zaal E) naar de assistenten toe. Gebruik het vragenuur niet alleen om je fouten achteraf in te zien maar ook om ze te voorkomen! We raden je aan om ook opgaven die je wel voldoende, maar niet helemaal correct hebt beantwoord, opnieuw te maken en door een medestudent te laten nakijken met behulp van de voorbeelduitwerking. Deze zal kort na de deadline op Blackboard geplaatst worden, wat overigens de reden is dat we de inleverdeadline erg strikt hanteren.

Onvoldoende

Wanneer je minder dan 60% van de punten hebt gehaald (of als je de eerste deadline niet gehaald hebt), krijg je per practicumopgave **eenmaal** de gelegenheid om toch een voldoende te halen. Maar je moet nu wel **70% van de punten** voor de hele practicumopgave halen. Als je een herkansing ook niet haalt heb je een onvoldoende voor het hele practicum. Je dient dan **het hele practicum** volgend jaar over te doen. Ook voor de herkansing is weer een deadline, die op de opgave en op Blackboard te vinden is.

Te laat

Als je je antwoorden **te laat** inlevert, wordt je opgave niet meer nagekeken. Je enige kans is dan nog om **alle vragen van de herkansing te maken** en daarmee **70%** te scoren. Daarna is er geen herkansing meer, dus als je de herkansing niet haalt of te laat inlevert, heb je een onvoldoende voor het hele practicum en moet je het hele practicum het volgende jaar overdoen.

Fraude

Je mag bij dit practicum met andere studenten (dan je partner) overleggen over de opgave, maar je moet samen met je partner je antwoord opschrijven, dus in jullie eigen woorden. Bovendien moet je op je uitwerking vermelden met wie je overlegd hebt. Als je je hier niet aan houdt, dan zal de examencommissie hiervan op de hoogte gesteld worden. Dat kan in het ergste geval leiden tot een jaar uitsluiting van de studie.

1. **Bewijs en tegenvoorbeeld**

   (a) (3 punten) Voor deze opgave heb je de volgende definitie nodig.
   Definitie (Deelbaar)**.** *Een geheel getal a is* deelbaar door *een geheel getal b wanneer er een geheel getal k bestaat zodanig dat $a = kb$. We zeggen dan ook wel: b deelt a en schrijven $b \mid a$.*
   Geef nu een bewijs van de volgende stelling.
   Stelling. *Voor alle gehele getallen $n \in \mathbb{Z}$ geldt* $3 \mid (n^3 - n)$.
   Tip: gebruik een gevalsonderscheid; het onderscheid even/oneven is hier niet fijnmazig genoeg. Kijk dus goed naar wat je moet bewijzen om te beslissen welke gevallen je onderscheidt. Zoals altijd: experimenteer met een aantal getallen om gevoel voor de stelling te krijgen.

   (b) (4 punten) Geef een bewijs voor de volgende stelling.
   Stelling. *Stel dat x een oneven getal is. Dan is x^2 te schrijven als $8n + 1$ voor een geheel getal n.*
   Hint: gebruik een gevalsonderscheid.

   (c) (4 punten) Geef een bewijs of tegenvoorbeeld voor de volgende bewering.
   Bewering. *Stel dat a een geheel getal is waarvoor geldt $4 \mid a$. Dan is a het verschil van 2 kwadraatgetallen.*

2. **Equivalenties**

   (a) (3 punten) Schrijf de volgende formules in een equivalente vorm waarin je alleen de aangegeven connectieven gebruikt. Geef steeds alle stappen aan die je zet in het herschrijven.
      i. Herschrijf $p \vee (q \wedge r)$ met alleen $\neg$ en $\rightarrow$.
      ii. Herschrijf $q \vee (p \rightarrow q)$ met alleen $\neg$ en $\wedge$.

   (b) (3 punten) Maak waarheidstafels om aan te tonen dat de gevonden formules bij 2.a.i en 2.a.ii inderdaad equivalent zijn met de gegeven formules. (Hanteer daarbij de conventie voor het ordenen van de rijen.) Geef aan hoe je antwoord volgt uit de waarheidstafels.

   (c) (3 punten) Schrijf de formules die je bij 2.a hebt gevonden in CNV en DNV.

3. **Inductie**

   (a) (5 punten) Geef een bewijs met inductie van de volgende stelling.
   Stelling. *Voor alle gehele getallen $n \in \mathbb{Z}$ geldt* $3 \mid (n^3 - n)$.

   (b) (5 punten) Beschouw de volgende recursieve definitie van een verzameling getallen:
   Definitie.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_1 &= 2 \\
a_n &= (a_{n-1})^2 / a_{n-2} && \textit{voor alle } n \geq 2.
\end{aligned}
$$

   Bewijs met inductie de volgende stelling over deze getallen:
   Stelling. *Voor alle $n \geq 0$ geldt $a_n = 2^n$.*
   Tip: pas de opzet van je inductiebewijs aan aan de structuur in deze verzameling getallen. Je basisgeval moet 2 delen bevatten, maar ook je inductiehypothese (net als bij structurele inductie).

   (c) (5 punten) Schrijf de recursieve definities op van de functies $h : PROP \mapsto \mathbb{N}$ en $f : PROP \mapsto \mathbb{N}$, die aan elke formule $F \in PROP$ het *aantal haakjes* en de *lengte* toekennen, respectievelijk. Ze staan op de slides van college 4 en in het dictaat *Logica* (p. 23), respectievelijk.
   Bewijs nu met structurele inductie dat voor alle formules $F \in PROP$ geldt dat $\frac{3}{2} \cdot h(F) \leq f(F)$.

4. **Meta-beweringen**

   Bepaal voor de volgende meta-beweringen of ze waar of onwaar zijn. Geef een bewijs respectievelijk tegenvoorbeeld om je antwoord te onderbouwen. Als je een tegenvoorbeeld geeft, moet je duidelijk maken hoe dat de onwaarheid van de bewering aantoont.

   (a) (6 punten)
   Bewering. *Als* $\models A \rightarrow B$ *dan* $[\ \models A \ \Rightarrow\ \models B\ ]$.

   (b) (6 punten)
   Bewering. *Als* $[\ \models A \ \Rightarrow\ \models B\ ]$ *dan* $\models A \rightarrow B$.

Einde practicumopgaven