TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TI1300: Redeneren en Logica, Practicum 1

Deadline: 17 september 2010, 10:45 uur

Introductie

In deze practicumopgave komt de stof uit colleges 1 t/m 5 aan de orde, kijk op Blackboard voor een overzicht van de bij deze colleges behorende stof in het dictaat. De bedoeling is dat je na het maken van dit practicum in staat bent om:

- formele wiskundige definities te begrijpen en erover te redeneren;
- eenvoudige wiskundige bewijzen te maken, gebruik makend van bewijstechnieken als reductio ad absurdum, contrapositie, volledige inductie, structurele inductie, en voor alle-redeneringen;
- waarheidstafels voor formules op te stellen, en voor redeneringen, en die te gebruiken om uitspraken te doen over de geldigheid van redeneringen.

Practicum maken

Je maakt het practicum **in tweetallen**. Denk individueel na over wat het antwoord moet zijn, maar ook over hoe je het zou moeten opschrijven, en bespreek vervolgens je antwoorden met elkaar. Dit zijn belangrijke vaardigheden bij het leveren van overtuigende redeneringen, die je individueel moet beheersen. Op het tentamen, zowel van TI1300 als van andere gerelateerde vakken, zul je het zelf moeten doen.

Als je geen practicumpartner kunt vinden, stuur dan een mailtje naar Harmjan Treep (harmjan.treep@gmail.com), één van de student-assistenten van TI1300, **met in het subject "practicum TI1300" of "practicum IN1305,"** afhankelijk van welk practicum je maakt. Hij zal tweetallen samenstellen en jullie emailsgewijs met elkaar in contact brengen. Vervolgens werk je samen aan de volgende practica.

Inleveren

De uitwerking van deze opgave moet **op papier** worden ingeleverd in het postvakje "TI1300" of "IN1305," op de 7e verdieping, bij het verlaten van de lift direct links in het keukentje, rechts onderin de kast met postvakjes. Let op dat je het juiste postvakje gebruikt. Zorg dat je ingeleverde document aan de volgende eisen voldoet:

- meerdere vellen zijn aan elkaar **vastgeniet**, dus geen snelhechters, insteekhoezen, vouwtjes, scheurtjes, paperclips, en andere fratsen.
- in elk geval **op de eerste bladzijde** staan jullie namen en studienummers en het practicumnummer, alsmede de **vakcode** waarvoor je het practicum maakt,
- daaronder staan namen en studienummers van degenen met wie je overlegd hebt (indien van toepassing),
- bij iedere opgave staat het opgavenummer,
- ieder antwoord is goed leesbaar, in correct Nederlands of Engels geformuleerd en **bevat een duidelijke uitleg** in je eigen woorden van hoe je aan dat antwoord komt,
- bij ieder antwoord is voldoende lege ruimte voor de assistenten om hun opmerkingen te plaatsen.

Bij voorkeur zijn de uitwerkingen op de computer gemaakt. Dit voorkomt enerzijds onduidelijkheden door slordige correcties en anderzijds onleesbare handschriften. LaTeX is een (gratis) opmaaksysteem gespecialiseerd in teksten met veel mathematische symbolen. Op Blackboard staat instructie over het gebruik van LaTeX.

Beoordeling

Het practicum is een **verplicht** studieonderdeel dat afgerond moeten worden met een voldoende, of bij een onvoldoende het volgende jaar opnieuw gedaan moet worden. Je haalt een voldoende voor een reguliere practicumopgave als je **60% van de punten** behaalt. Voor een herkansing moet je **70% van de punten** behalen. Er zijn drie practicumopgaven die alledrie voldoende moeten zijn.

Feedback en vragenuur

Bij de beoordeling letten we op de correctheid, de duidelijkheid en volledigheid van de antwoorden. De assistenten zullen feedback op je antwoorden op je antwoordvel zetten, en ook hun initialen, zodat je weet tot wie je je met vragen kunt wenden. Bestudeer deze feedback goed, zodat je bij een volgende opgave—bijvoorbeeld op het tentamen—niet dezelfde fouten maakt. Als je tijdens het maken van een opgave vragen hebt, ergens niet uitkomt of achteraf vragen hebt over de feedback, ga dan in het **vragenuur** (dinsdagmiddag na het college, van 12:30-13:30 in zaal E) naar de assistenten toe. Gebruik het vragenuur niet alleen om je fouten achteraf in te zien maar ook om ze te voorkomen! We raden je aan om ook opgaven die je wel voldoende, maar niet helemaal correct hebt beantwoord, opnieuw te maken en door een medestudent te laten nakijken met behulp van de voorbeelduitwerking. Deze zal kort na de deadline op Blackboard geplaatst worden, wat overigens de reden is dat we de inleverdeadline erg strikt hanteren.

Onvoldoende

Wanneer je minder dan 60% van de punten hebt gehaald (of als je de eerste deadline niet gehaald hebt), krijg je per practicumopgave **eenmaal** de gelegenheid om toch een voldoende te halen. Maar je moet nu wel **70% van de punten** voor de hele practicumopgave halen. Als je een herkansing ook niet haalt heb je een onvoldoende voor het hele practicum. Je dient dan **het hele practicum** volgend jaar over te doen. Ook voor de herkansing is weer een deadline, die op de opgave en op Blackboard te vinden is.

Te laat

Als je je antwoorden **te laat** inlevert, wordt je opgave niet meer nagekeken. Je enige kans is dan nog om **alle vragen van de herkansing te maken** en daarmee **70%** te scoren. Daarna is er geen herkansing meer, dus als je de herkansing niet haalt of te laat inlevert, heb je een onvoldoende voor het hele practicum en moet je het hele practicum het volgende jaar overdoen.

Fraude

Je mag bij dit practicum met andere studenten (dan je partner) overleggen over de opgave, maar je moet samen met je partner je antwoord opschrijven, dus in jullie eigen woorden. Bovendien moet je op je uitwerking vermelden met wie je overlegd hebt. Als je je hier niet aan houdt, dan zal de examencommissie hiervan op de hoogte gesteld worden. Dat kan in het ergste geval leiden tot een jaar uitsluiting van de studie.

1. **Bewijs en tegenvoorbeeld**

(a) (2 punten) Leg uit wat het verschil is tussen het bewijzen van een contrapositie en een bewijs uit het ongerijmde. Wees zo specifiek mogelijk.

Antwoord: Bij een bewijs uit het ongerijmde van de implicatie "als A dan B" neem je aan dat A waar is, en ook dat "niet B" waar is, en leidt je een tegenspraak af.

Bij het bewijzen van de contrapositie van dezelfde implicatie neem je aan dat "niet B" waar is, en leidt je "niet A" af.

In beide gevallen neem je dus aan dat "niet B" waar is. Bij de contrapositie moet je "niet A" bewijzen, en bij het bewijs uit het ongerijmde neem je ook nog A aan, en moet je een tegenspraak afleiden.

N.B.: Deze vraag is niet goed geformuleerd, het is met name niet duidelijk wat hier het juiste antwoord zou moeten zijn. Iedereen zal om deze reden hier 2 punten toegekend krijgen.

(b) Voor deze opgave heb je de volgende definitie nodig.
Definitie (Kwadraatgetal)**.** *Een* kwadraatgetal *(ook wel* perfect vierkant *genoemd) is een geheel getal dat het kwadraat is van een ander geheel getal. Met andere woorden, de wortel uit een kwadraatgetal is een geheel getal.*

Kwadraatgetallen zijn bijvoorbeeld 0, 1, 4, 9, 16, etc.

i. (5 punten) Geef een bewijs voor de volgende stelling:
Stelling. *Stel dat x een oneven getal is. Dan is x het verschil van 2 kwadraatgetallen.*

Antwoord: Voorwerk: Een oneven getal kunnen we schrijven als $2a+1$ voor $a \in \mathbb{Z}$. Zo zijn -3, -1, 1, 3, en 5 oneven getallen voor $a = -2, -1, 0, 1$, respectievelijk 2. Probeer eens wat getallen uit, waarbij je oneven getallen schrijft als verschil van 2 kwadraatgetallen:

a	$2a+1$		verschil
-2	-3	$=$	$(-1)^2 - (-2)^2$
-1	-1	$=$	$0^2 - (-1)^2$
0	1	$=$	$1^2 - 0^2$
1	3	$=$	$2^2 - 1^2$
2	5	$=$	$3^2 - 2^2$

Hopelijk ontdek je al snel dat de kwadraatgetallen die in de rechterkolom van elkaar afgetrokken worden gelijk zijn aan $(a+1)^2$ en a^2. Dat is redelijk eenvoudig, dus het bewijs is kort.

Bewijs. Omdat x een oneven getal is, kunnen we x schrijven als $2a+1$ voor $a \in \mathbb{Z}$. Nu geldt dat $(a+1)^2 - a^2 = a^2 + 2a + 1 - a^2 = 2a + 1$, dus zijn er voor elke waarde van a, en dus voor elk oneven getal, twee kwadraatgetallen, namelijk $x = (a+1)^2$ en $y = a^2$, zodat $2a + 1 = x - y$. QED

ii. (3 punten) Voor deze opgave heb je de volgende definitie nodig.
Definitie (Deelbaar)**.** *Een geheel getal a is* deelbaar door *een geheel getal b wanneer er een geheel getal k bestaat zodanig dat $a = kb$. We zeggen dan ook wel: b deelt a en schrijven $b \mid a$.*
Bepaal of de volgende beweringen waar of onwaar zijn. Als je denkt dat een bewering waar is, geef een bewijs, en als je denkt dat hij onwaar is, geef dan een tegenvoorbeeld, en beargumenteer hoe dat de onwaarheid aantoont.
Bewering. *Stel dat $a \mid b$ en $a \mid b + c$. Dan geldt dat $a \mid c$.*

Antwoord: Deze bewering is waar, waar je met wat experimenteren snel achter zult komen.

Bewijs. Omdat $a \mid b$ bestaat er een k_1 zdd $b = ak_1$, en omdat $a \mid b+c$, bestaat er een k_2 zdd $b+c = ak_2$, waar k_1 en k_2 gehele getallen zijn. Nu is $c = (b+c)-b = ak_2-ak_1 = a(k_2-k_1)$. Er bestaat dus een geheel getal $k = k_2 - k_1$ zodanig dat $c = ak$, dus geldt $a \mid c$. QED

iii. (3 punten)
Bewering. *Stel dat $a \mid b$ en $a \mid b \cdot c$. Dan geldt dat $a \mid c$.*

Antwoord: Deze bewering is onwaar. Neem bijvoorbeeld $a = b = 2$ en $c = 1$. Nu zijn wel de premissen waar, want $2 \mid 2$ en $2 \mid 2 \cdot 1$. Maar de conclusie is onwaar, want er geldt niet dat $2 \mid 1$.

(c) (5 punten) Beschouw de volgende definitie.
Definitie (Palindroomgetal). *Een palindroomgetal is een getal dat van links naar rechts bezien hetzelfde is als van rechts naar links bezien.*

Het getal 13631 is bijvoorbeeld een palindroomgetal. Geef nu een bewijs van de volgende stelling.
Stelling. *Stel dat x een 4-cijferig palindroomgetal is. Dan geldt $11 \mid x$.*

Antwoord: Voorwerk: Een 4-cijfering palindroomgetal is bijvoorbeeld 1221. In het algemeen bestaat het uit slechts 2 verschillende cijfers. Op de eerste positie kun je een cijfer van $1, 2, \ldots, 9$ invullen, dat dan ook op de vierde positie komt te staan, en op de tweede positie kun je een cijfer van $0, 1, 2, \ldots, 9$ invullen, dat dan ook op de derde positie komt te staan. We noemen deze getallen a en b, respectievelijk, zodat het palindroomgetal $abba$ wordt. Dan kijken we naar hoe groot dat getal is, en stellen we vast dat het deelbaar is door 11.

Bewijs. Omdat x een 4-cijferig palindroomgetal is, kunnen we x schrijven als $abba$, waar $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ en $b \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Nu geldt dat

$$x = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b.$$

Neem nu het getal $k = x/11 = (1001a + 110b)/11 = 91a + 10b$. Omdat a en b gehele getallen zijn, is k dat ook, en bestaat er dus een geheel getal k zodanig dat $x = 11k$, en geldt $11 \mid x$. QED

Omdat overigens op positie a 9 verschillende cijfers mogen staan, en op positie b 10 verschillende cijfers, kun je deze stelling ook bewijzen door voor elk van deze $9 \times 10 = 90$ 4-cijferige palindroomgetallen te laten zien dat het deelbaar is door 11. Ik hoop dat je inziet dat het bewijs hierboven een veel betere en zelfs mooiere manier is, die bovendien *inzicht* geeft in de *reden* dat een 4-cijferig palindroomgetal deelbaar is door 11.

2. **Inductie**

(a) (4 punten) Geef een bewijs met inductie voor de volgende stelling.
Stelling. *Voor alle natuurlijke getallen $n \geq 1$ geldt*

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

Antwoord:

Bewijs (met inductie). Laat $P(n)$ de eigenschap van een natuurlijk getal $n \geq 1$ zijn dat $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$.

Basis ($n = 1$): Voor $n = 1$ geldt $P(n)$, want $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1 = \frac{1}{4} \cdot 4 = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 2^2 = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot (1+1)^2 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$.

Inductiestap: Neem een willekeurige $k \geq 1$. We moeten bewijzen dat als $P(n)$ geldt voor $n = k$, dan $P(n)$ ook geldt voor $n = k+1$. Stel dus dat $P(n)$ geldt voor $n = k$, dus dat $\sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{1}{4} k^2 (k+1)^2$ (de inductiehypothese). Te bewijzen is dat $P(n)$ ook geldt voor

$n = k+1$, dus dat $\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{1}{4}(k+1)^2(k+1+1)^2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i^3 &= \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3 && k+1 \text{ afsplitsen} \\
&= \frac{1}{4}k^2(k+1)^2 + (k+1)^3 && \text{volgens de IH} \\
&= \frac{1}{4}(k+1)^2(k^2+4k+4) && \frac{1}{4}(k+1)^2 \text{ buiten haakjes gehaald} \\
&= \frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2. \\
&= \frac{1}{4}(k+1)^2(k+1+1)^2.
\end{aligned}$$

Omdat k willekeurig was gekozen, geldt dit voor alle $n \geq 1$.

Volgens het inductie principe geldt nu de eigenschap voor alle $n \geq 1$. QED

(b) (2 punten) Beschouw de volgende stelling:
Bewering. *In elke groep paarden van omvang* $n \geq 1$ *hebben alle paarden dezelfde kleur. Met andere woorden: Alle paarden hebben dezelfde kleur.*
Wat is er fout aan het volgende bewijs van deze bewering?

Bewijs (met inductie).

Basis ($n = 1$): Als er maar één paard is, is er maar één kleur, dus voor 1 paard geldt de stelling.

Inductiestap: Te bewijzen is dat als alle paarden in een groep van n paarden dezelfde kleur hebben, ook alle paarden in een groep van $n+1$ paarden dezelfde kleur hebben.
Stel dus dat in groepen van n paarden er maar één kleur voorkomt (de inductiehypothese). Beschouw nu een groep van $n+1$ paarden, en nummer deze paarden $1, 2, 3, \ldots, n, n+1$. Zowel de groep $1, 2, 3, \ldots, n$ als de groep $2, 3, 4, \ldots, n, n+1$ bestaat uit n paarden, dus volgens de IH komt er in beide groepen maar één kleur voor. Maar de groepen overlappen, dus moet dat in beide groepen dezelfde kleur zijn, en zo hebben alle $n+1$ paarden dezelfde kleur.

Volgens het principe van inductie hebben nu de paarden in alle groepen paarden dezelfde kleur, oftewel: alle paarden hebben dezelfde kleur. QED

Antwoord: Het bewijs gaat mis in de inductiestap. Hier moet *voor alle* $n \geq 1$ worden bewezen dat als alle paarden in een groep van n paarden dezelfde kleur hebben, ook alle paarden in een groep van $n+1$ paarden dezelfde kleur hebben. De gegeven redenering werkt niet voor *alle* n, want als $n = 1$ is $n+1 = 2$, maar in een groep van 2 paarden mist de cruciale *overlap* tussen de beide groepen (met paarden 1 en 2). Dan kan het dus wel zo zijn dat 'alle' paarden in beide groepen dezelfde kleur hebben (dus dat het paard in elk van de twee groepen een bepaalde kleur heeft), maar mag niet worden geconcludeerd dat dat voor beide groepen *dezelfde* kleur is. Voor groepen ≥ 2 geldt de redenering overigens wel, maar dat doet feitelijk niet ter zake.

(c) **Structurele Inductie**

i. (2 punten) Geef een recursieve definitie van de functie $p : PROP \to \mathbb{N}$, die aan elke formule $F \in PROP$ het aantal propositiesymbolen in F toekent.

Antwoord: De functie p die aan een formule het aantal propositiesymbolen in die formule toekent, wordt recursief gedefinieerd als het volgende stelsel recurrente betrekkingen met randvoorwaarde:

$$\begin{aligned}
p(p_i) &= 1 && \text{voor elke } i \in \mathbb{N} \\
p(\neg A) &= p(A) && \text{voor } A \in PROP \\
p((A \star B)) &= p(A) + p(B) && \text{voor } A, B \in PROP \text{ en } \star \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}
\end{aligned}$$

ii. (2 punten) Geef een recursieve definitie van de functie $t : PROP \to \mathbb{N}$, die aan elke formule $F \in PROP$ het aantal 2-plaatsige connectieven in F toekent.

Antwoord: De functie t die aan een formule het aantal 2-plaatsige connectieven in die formule toekent, wordt recursief gedefinieerd als het volgende stelsel recurrente betrekkingen met randvoorwaarde:

$$\begin{aligned} t(p_i) &= 0, && \text{voor elke } i \in \mathbb{N} \\ t(\neg A) &= t(A) && \text{voor } A \in PROP \\ t((A \star B)) &= t(A) + t(B) + 1 && \text{voor } A, B \in PROP \text{ en } \star \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\} \end{aligned}$$

iii. (4 punten) Bewijs met structurele inductie over $PROP$ de volgende stelling.
Stelling. *Voor alle formules $F \in PROP$ geldt dat $p(F) = t(F) + 1$.*

Antwoord:

Bewijs (met inductie). Laat $P(F)$ de eigenschap van een formule $F \in PROP$ zijn dat $p(F) = t(F)+1$. Het bewijs volgens structurele inductie over $PROP$ verloopt nu als volgt.

basisstap ($F = p_i$): voor $F = p_i$ geldt $P(F)$, want
$p(F) = p(p_i) = 1 = 0 + 1 = t(p_i) + 1 = t(F) + 1.$

inductiestap: We moeten bewijzen dat als de eigenschap geldt voor een formule A, hij ook geldt voor $\neg A$ en dat als de eigenschap geldt voor formules A en B, hij ook geldt voor $(A \star B)$, waar $\star \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$. We nemen dus aan—dit is de inductiehypothese (IH), met onderdelen A en B—dat de eigenschap geldt voor 2 willekeurige formules $A, B \in PROP$, dus dat $p(A) = t(A) + 1$ (dat is IH-A) en $p(B) = t(B) + 1$ (dat is IH-B). Nu moeten we bewijzen dat de eigenschap ook geldt voor $\neg A$ en $(A \star B)$.

geval $\mathbf{F} = \neg\mathbf{A}$: voor $F = \neg A$ geldt dat

$$\begin{aligned} p(F) &= p(\neg A) \\ &= p(A) && \text{volgens de recursieve definitie van } p \\ &= t(A) + 1 && \text{volgens de IH-A} \\ &= t(\neg A) + 1, && \text{volgens de recursieve definitie van } t \\ &= t(F) + 1 \end{aligned}$$

dus geldt $P(F)$ voor $F = \neg A$.

geval $\mathbf{F} = (\mathbf{A} \star \mathbf{B})$: voor $F = (A \star B)$ geldt dat

$$\begin{aligned} p(F) &= p((A \star B)) \\ &= p(A) + p(B) && \text{volgens de recursieve definitie van } p \\ &= t(A) + 1 + p(B) && \text{volgens de IH-A} \\ &= t(A) + 1 + t(B) + 1 && \text{volgens de IH-B} \\ &= t((A \star B)) + 1, && \text{volgens de recursieve definitie van } t \\ &= t(F) + 1 \end{aligned}$$

dus geldt $P(F)$ voor $F = (A \star B)$. QED

3. **Waarheidstafels**

(a) (2 punten) Toon met behulp van een waarheidstafel aan dat de volgende redenering ongeldig is.

premisse 1:	De aarde is plat of de aarde is rond
premisse 2:	Als Beatrix de koningin van België is, is de aarde plat
premisse 3:	Beatrix is de koningin van België
conclusie:	De aarde is niet rond

Gebruik geschikte symbolen om elke atomaire propositie te representeren, en geef duidelijk aan welk symbool waarvoor staat. Leg ook duidelijk uit hoe de waarheidstafel de onwaarheid van de redenering aantoont.

Antwoord: We gebruiken $p =$ "de aarde is plat," $r =$ "de aarde is rond," en $b =$ "Beatrix is de koningin van België." Nu vertalen we premisse 1 als $p \vee r$, premisse 2 als $b \to p$, premisse 3 als b, en de conclusie als $\neg r$. Vervolgens construeren we een waarheidstabel voor deze redenering.

p	r	b	$p \vee r$	$b \to p$	b	$\therefore$	$\neg r$
0	0	0	0	1	0		1
0	0	1	0	0	1		1
0	1	0	1	1	0		0
0	1	1	1	0	1		0
1	0	0	1	1	0		1
1	0	1	1	1	1		1
1	1	0	1	1	0		0
1	1	1	1	1	1		0

In de onderste rij van de tabel zijn de premissen alledrie waar, maar de conclusie onwaar. Deze rij is dus een tegenvoorbeeld voor de geldigheid van de redenering.

(b) (2 punten) Waar precies zit de discrepantie tussen de natuurlijke taal en de taal van de propositielogica, die maakt dat deze redenering onwaar is terwijl dat in natuurlijke taal niet zo lijkt?

Antwoord: Als je in natuurlijke taal zegt dat de aarde plat of rond is (premisse 1), bedoel je één van beide, en niet dat de aarde tegelijkertijd zowel plat als rond is. Premissen 2 en 3 samen impliceren dat de aarde plat is, en onze common sense zegt dat hij dan niet rond is, omdat hij één van beide tegelijk is. Maar in de logica is premisse 1 ook waar als de aarde zowel plat als rond is. De precieze plek is dus dat in de natuurlijke taal 'of' in de regel exclusief is, terwijl 'of' dat in de logica niet is.

(c) (2 punten) Geef een formule uit $PROP$ die, wanneer hij *als premisse* aan de redenering wordt toegevoegd, maakt dat de redenering waar is. Alle propositievariabelen die je bij vraag (a) hebt geïntroduceerd moeten in je formule voorkomen.

Antwoord: Omdat de onderste rij het enige tegenvoorbeeld is, moet de nieuwe premisse in die rij onwaar zijn, zodat in die rij niet alle premissen waar zijn—het maakt dan niet meer uit wat de conclusie in die rij is. De gevraagde formule kan bijvoorbeeld de negatie zijn van de conjunctie van de drie gebruikte propositievariabelen. Een simpele formule die dit doet is $\neg(p \wedge (r \wedge b))$, die in de onderste rij onwaar, en in de overige rijen waar is. Let op dat je formule in $PROP$ moet zitten, en dus geldig moet zijn volgens de recursieve definitie van de syntax van $\mathcal{P}$.

4. **Meta-beweringen**

Bepaal of de volgende beweringen waar of onwaar zijn. Als een bewering waar is, geef er dan een bewijs voor, als een bewering onwaar is, geef dan een tegenvoorbeeld in de vorm van specieke formules uit $PROP$ waar de metavariabelen voor staan, en beargumenteer hoe dat tegenvoorbeeld de onwaarheid van de bewering aantoont.

(a) (3 punten)
Bewering. *Voor alle formules A en B geldt: Als* $\models \neg A \to \neg B$ *dan* $\models A \vee \neg B$.

Antwoord: Deze bewering is waar. $\neg A \to \neg B$ is de contrapositie van, en dus equivalent met, $B \to A$, en dat is equivalent met $\neg B \vee A$. Als dus de eerste een tautologie is, is de tweede het ook.

Bewijs. Stel dat $\models \neg A \to \neg B$. Dat geldt dus voor alle valuaties dat $v(\neg A \to \neg B) = 1 = \max(1 - v(\neg A), v(\neg B)) = \max(1 - (1 - v(A)), 1 - v(B)) = \max(1 - 1 + v(A), 1 - v(B)) = \max(v(A), 1 - v(B))$. We moeten bewijzen dat voor alle valuaties geldt dat $v(A \vee \neg B) = 1$. Neem dus een willekeurige valuatie, w, waarvoor we moeten bewijzen dat $w(A \vee \neg B) = 1$. Nu geldt dat $w(A \vee \neg B) = \max(v(A), v(\neg B)) = \max(v(A), 1 - v(B))$, maar volgens het antecedent geldt dat voor alle valuaties, dus ook voor w, dat dit gelijk is aan 1. Omdat w willekeurig was gekozen, geldt dit voor alle valuaties, oftewel er geldt dat $\models A \vee \neg B$. QED

Als aanvulling het volgende. Omdat de beide formules, zoals hierboven aangegeven, equivalent zijn, geldt de converse van deze implicatie ook.

Stelling. *Voor alle formules A en B geldt: Als* $\models A \vee \neg B$ *dan* $\models \neg A \to \neg B$.

Je kunt als oefening proberen hier zelf een bewijs voor te vinden. In het algemeen kun je het bewijzen van meta-beweringen oefenen door de beide implicaties voor equivalente formules te bewijzen. Eén ding wat je dan al niet meer hoeft te doen is te bedenken of de meta-bewering waar is.

(b) (3 punten)

Bewering. *Voor alle formules A en B geldt: Als* $\models \neg A \to \neg B$ *dan* $[\ \models A \quad \bigvee \quad \models \neg B\ ]$.

Antwoord: Hoewel hij lijkt op de vorige bewering, is deze bewering onwaar. Een poging een bewijs te vinden strandt, omdat je onder de aanname van het antecedent niet kunt bewijzen dat A een tautologie is en ook niet dat $\neg B$ een tautologie is. Een tegenvoorbeeld moet het antecedent waarmaken en het consequent onwaar. Het is het simpelst nu dezelfde formules voor A en B te nemen, en dat gewoon eenvoudige (niet-tautologische en niet-contradictoire) formules te laten zijn. Voor elke formule A geldt namelijk dat $\models A \to A$ oftewel $\models \neg A \to \neg A$. Neem als tegenvoorbeeld dus de formules $A = B = p$. We laten eerst zien dat het antecedent van de metabewering waar is. Er geldt voor een willekeurige valuatie w dat

$$\begin{aligned} w(\neg A \to \neg B) = w(\neg p \to \neg p) &\\ &= \max(1 - w(\neg p), w(\neg p)) \\ &= \max(1 - (1 - w(p)), 1 - w(p)) \\ &= \max(1 - 1 + w(p), 1 - w(p)) \\ &= \max(w(p), 1 - w(p)). \end{aligned}$$

Er geldt altijd dat $w(p) = 0$ of $w(p) = 1$, dus we onderscheiden die beide gevallen.

- Als $w(p) = 0$ is $\max(w(p), 1 - w(p)) = \max(0, 1 - 0) = 1$.
- Als $w(p) = 1$ is $\max(w(p), 1 - w(p)) = \max(1, 1 - 1) = 1$ dus $w(\neg p \to \neg p) = 1$.

Omdat w willekeurig was gekozen, geldt dit voor alle valuaties, dus er geldt dat $\models \neg p \to \neg p$, en dus is het antecedent van de metabewering waar. Het consequent is onwaar want er geldt niet dat $\models p$ en ook niet dat $\models \neg p$. Voor elke valuatie is namelijk $v(p) = 0$ of $v(p) = 1$. Als $v(p) = 0$ geldt dat $\models p$ niet waar is, en als $v(p) = 1$ geldt dat $\models \neg p$ niet waar is.

(c) (3 punten)

Bewering. *Voor alle formules A en B geldt: Als* $\models \neg A$ *dan* $\sim\models A$.

Antwoord: Deze bewering is waar.

Bewijs. Stel dat $\models \neg A$. Dan geldt dus voor alle valuaties dat $v(\neg A) = 1 - v(A) = 1$, dus dat $v(A) = 0$. Dan geldt dus inderdaad niet voor alle valuaties dat $v(A) = 1$, dus geldt niet dat

$\models A$, en er geldt wel dat $\sim\models A$. QED

(d) (3 punten)
Bewering. *Voor alle formules A en B geldt: Als* $\sim\models A$ *dan* $\models \neg A$.

Antwoord: Deze bewering is onwaar. Neem bijvoorbeeld $A = p$. Dan is het antecedent $\sim\models A$ waar, want voor elke valuatie waarvoor $v(p) = 0$ is $v(A) = 0$, en dan geldt niet voor alle valuaties dat $v(A) = 1$. Maar het consequent is onwaar, want voor valuatie $v(p) = 1$ is $v(\neg A) = 1 - v(A) = 1 - v(p) = 1 - 1 = 0$, en dus geldt niet voor alle valuaties dat $v(\neg A) = 1$, zoals het consequent beweert.

Einde practicumopgaven