TI1300 Redeneren en Logica

College 1: Inleiding en Bewijstechnieken

Tomas Klos

Algoritmiek Groep

TU Delft

TI1300: Redeneren en Logica

TI1300 bestaat uit 2 delen:

Th: Theorie, Tomas Klos

Pr: Practicum, Tomas Klos plus student-assistenten

TU Delft

Blackboard: enroll!

Blackboard pagina TI1300:

- studie-handleiding Logica (planning)
- overzicht behandelde stof per college
- slides
- handouts, uitwerkingen van opgaven
- index van gebruikte symbolen
- opdrachten, uitslagen, en uitwerkingen van het practicum
- oefenopdrachten, oude tentamens
- announcements

Hou deze pagina goed in de gaten!

TU Delft

Studiemateriaal

- Dictaat Redeneren en Logica, hoofdstukken uit
  - *Beschrijven en Bewijzen*, H. Zantema & P. Lemmens, 1999.
  - *Logica*, H. Tonino, 2002.
- slides van colleges, beschikbaar via Blackboard
- aanvullend materiaal op Blackboard

TU Delft

Practicum

- Het practicum bestaat uit 3 take-home opdrachten, bedoeld om je bij de stof te houden en te laten oefenen.
- Dus 60% norm voor opdracht, 70% voor herkansing
- Procedure op de opgave zelf, en op Blackboard
- Verzoek/aanbeveling: gebruik LaTeX, `http://www.latex-project.org/`

Practicum

Je levert het practicum **in tweetallen** in!

- denk na over de opdracht
- bespreek de opdrachten met elkaar, belangrijk elkaar te kunnen overtuigen
- bedenk ook samen hoe en wat op te schrijven, belangrijke skill, die je beiden moet beheersen (tentamen, andere vakken)
- gebruik LaTeX, als je schrijft: netjes (onleesbaar is fout!)
- bekijk de practica vóór de colleges waar ze over gaan

Jullie beoordeling door mij

Tentamen:

- Deels Multiple Choice, deels open vragen
- Data: 4 November 2010, herkansing 21 Januari 2011

Practicum:

- alle 3 de opdrachten moeten voldoende zijn

Mijn beoordeling door jullie

- Ik waardeer feedback zeer
- De CRI-1 is goed, maar laat
- Heb je opmerkingen, suggesties, vragen: laat het me weten

Collegeregels

- College volgen is een keuze: je zit hier voor jou, niet voor mij
  - Het college heeft toegevoegde waarde voor je
  - Je wil de uitleg niet missen
  - Je wil met de stof bezig zijn
- Kom op tijd, of anders na de pauze
- Niet praten tijdens college (wel tijdens opgaven maken)
- Stel vragen aan mij, niet aan je buur
- **Geen laptops**, wel pen en papier

TU Delft

Wat is Logica?

Van Dale:

Definitie (lo·gi·ca (de^{v}) (zelfst. naamwoord))

1. *juiste, rationele opeenvolging van oorzaak en gevolg*
2. *wetenschap die zich met de formele regels van het denken bezighoudt*

Hier gebruiken we:

Definitie ((Formele, wiskundige) Logica)

Het vakgebied dat zich bezig houdt met principes van en criteria voor correct, geldig redeneren.

TU Delft

Redenering en Geldigheid

Sleutelbegrip:

Definitie (Redenering)

Een redenering of gevolgtrekking is een verzameling ≥ 0 premissen gevolgd door een conclusie.

Belangrijke vraag:

Is de redenering geldig, oftewel
Volgt de conclusie uit de premissen?

ja? een bewijs toont dit aan
nee? een tegenvoorbeeld toont dit aan

TU Delft

Geldigheid van Redeneringen

Een geldige redenering?

premisse	Als het regent, dan wordt de straat nat.
premisse	Het regent.
conclusie	De straat wordt nat.

Definitie (Geldigheid van een redenering (informeel))

Een redenering is correct of logisch geldig wanneer
*we **gedwongen** zijn de conclusie voor waar aan te nemen*
***als** we de premissen voor waar aannemen.*

TU Delft

Belangrijke Les

Definitie (Geldigheid van een redenering (informeel))

Een redenering is correct of logisch geldig wanneer we **gedwongen** *zijn de conclusie voor waar aan te nemen* **als** *we de premissen voor waar aannemen.*

Belangrijke Les

Het is dus **niet belangrijk of** de premissen waar zijn,
maar **alleen** of de conclusie waar is **als** de premissen waar zijn.

Mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true.

Bertrand Russell

lft

Vorm van de redenering

De vorm van deze *geldige* redeneringen is gelijk (Modus Ponens)

premisse	als p, dan q.
premisse	p.
conclusie	$\therefore q$.

Belangrijke les

Logische geldigheid is een eigenschap van de vorm van een redenering en niet van de inhoud ervan.

Voor p en q mogen we invullen wat we willen—als we dat in de premissen en in de conclusie consistent doen, blijft de redenering geldig.

TUDelft

Proposities en Predicaten

Geldige redenering?

premisse	Alle zangers zijn mensen.
premisse	Marco Borsato is een zanger.
conclusie	∴ Marco Borsato is (ook maar) een mens.

We weten dat de redenering geldig is, maar vertaald als eerder:

premisse	p.
premisse	q.
conclusie	$\therefore r$.

Het is een geldige redenering in de predicatenlogica.
Hierboven ging het om de propositielogica.

TUDelft

Bewijs en Tegenvoorbeeld

Als een redenering ...

- logisch geldig is, een stelling is,
  zal een bewijs dat aantonen, en verklaren waarom ... wat?
  de conclusie altijd waar is als de premissen dat zijn
- niet logisch geldig is,
  toont een tegenvoorbeeld dat aan ... wat?
  situatie waarin de premissen waar zijn, maar de conclusie niet.

TUDelft

Waarom Redeneren en Logica?

Bewijzen zijn belangrijk in de *exacte wetenschappen*,
zo ook de (fundamentele) informatica.

Michael Sipser, *Introduction to the Theory of Computation*, p. 17

> *Theorems and proofs are the heart and soul of mathematics and definitions are its spirit. These three entities are central to every mathematical subject, including ours.*

TUDelft

Logica in de Informatica

TI1300 Redeneren en Logica:

- Principes van en regels voor correct redeneren (bewijzen)

Deze kennis is te gebruiken in:

- Automaten en Talen: eigenschappen van *abstract beschreven* computers en problemen
- Berekenbaarheid: is een probleem 'berekenbaar'?
- Complexiteitstheorie: is een probleem 'doenbaar'?
- Algoritmiek: efficiëntie en correctheid van algoritmen

TUDelft

Stellingen, Bewijzen, en Definities

Definitie (Deelbaar)

Een geheel getal a is deelbaar door een ander geheel getal b als er een geheel getal k bestaat zdd (zodanig dat) $a = bk$. We zeggen dan ook wel: b deelt a en schrijven $b \mid a$.

Stelling (Engels: "Theorem")

Stel dat a deelbaar is door b en b deelbaar is door c.
Dan is a deelbaar door c, oftewel: als $b \mid a$ en $c \mid b$, dan $c \mid a$.

Bewijs (Engels: "Proof").

Volgens de premissen (en de definitie van deelbaarheid), bestaan er gehele getallen k_1 en k_2 zdd $a = k_1 b$ en $b = k_2 c$.
Dan is $a = k_1 k_2 c$, en geldt $c \mid a$ (namelijk $k_1 k_2$ keer). QED

lft

Oefening

Is deze bewering waar? Zo ja, geef een bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

Bewering

Stel dat $b \mid a$ en $c \mid a$. Dan geldt $b + c \mid a$.

De bewering is niet waar.

Tegenvoorbeeld

Neem $b = 3$, $c = 4$, en $a = 12$. Dan gelden wel de premissen, want $3 \mid 12$ en $4 \mid 12$. Maar de conclusie is niet waar, want er geldt niet dat $3 + 4 \mid 12$.

TUDelft

Oefening

Is deze bewering waar? Zo ja, geef een bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

Bewering

Stel dat $a \mid b$ en $a \mid c$. Dan geldt $a \mid b + c$.

De bewering is waar.

Bewijs.

Volgens de premissen geldt $b = k_1 a$ en $c = k_2 a$. Nu is $b + c = k_1 a + k_2 a = a(k_1 + k_2)$. Dus bestaat er een geheel getal $k = k_1 + k_2$ zdd $ak = b + c$, zodat $a \mid b + c$. QED

TUDelft

Stellingen en zo

Een stelling ("Theorem") is een ware bewering, vergezeld van een bewijs om de lezer van die waarheid te overtuigen, en duidelijk te maken waarom de bewering waar is.
Andere ware beweringen die je tegen kunt komen:

- Proposition: 'minder belangrijk'
- Lemma: hulpstelling, gebruikt in het bewijs van een Theorem.
- Corollary: stelling die onmiddellijk volgt uit het bewijs van een eerdere stelling

TUDelft

Stelling, bewijs en tegenvoorbeeld

In dit vak kom je ook tegen:

Bewering

Stel "als A dan B" en "als B dan C." Dan geldt "als A dan C."

Je taak is dan te bepalen of de bewering waar is of onwaar.

- waar: dan is de bewering een stelling en moet je een bewijs geven om dat (anderen) duidelijk te maken.
- onwaar: dan is de bewering geen stelling, en moet je een tegenvoorbeeld geven om dat duidelijk te maken.

TUDelft

Eulers 'Som der Machten' vermoeden

Vermoeden (Euler (1769))

Voor alle gehele getallen $n, k > 1$, als de som van n $k$de machten van positieve gehele getallen zelf een $k$de macht is, dan is $n \geq k$.

Het vermoeden is niet waar. Hoe ziet een tegenvoorbeeld eruit?

Tegenvoorbeeld (Lander and Parkin (1966))

$k = 5$: $27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$,
$n = 4$ machten van $k = 5$, opgeteld een macht van 5, maar $n < k$.

Tegenvoorbeeld (methode voor $k = 4$ (Elkies, 1986))

zijn kleinste: $2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4$
de kleinste: $95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4$ (Frye, 1988)

TUDelft

Globale Opzet Deel I: Logica

Onderwerpen:

- logische bewijstechnieken
- propositielogica
- verzamelingenleer
- predicatenlogica

Bewijstechnieken worden uitgelegd a/d hand van voorbeelden uit een kunstmatige taal die jullie al kennen (wiskunde).
Daarna introduceren we nieuwe kunstmatige talen, waarop we weer die bewijstechnieken toepassen, zodat we tegelijkertijd

- dingen over die talen leren, en
- de bewijstechnieken kunnen oefenen.

Handig, hè?

TU Delft

Directe en indirecte bewijzen

Tot nu toe gezien:

Direct bewijs

Begin bij de premissen, en redeneer rechtstreeks naar de conclusie toe.

Alternatief

Indirect bewijs

Een bewijs met een omweg.

Andere namen:

- Bewijs uit het ongerijmde
- Reductio ad Absurdum

TU Delft

Bewijs uit het ongerijmde

Bewijs uit het ongerijmde

Om te bewijzen dat een uitspraak **waar** is, maak je de aanname dat de uitspraak **onwaar** is, en leid je daaruit een tegenspraak af.

Definitie (tegenspraak (contradictie, tegenstrijdigheid))

Een tegenspraak is het tegelijkertijd bestaan van een bewering en de ontkenning van diezelfde bewering.

Als dat lukt, moet de aanname **onwaar** zijn,
dus de uitspraak zelf **waar**!

TU Delft