TI1300: Redeneren en Logica

College 3: Bewijstechnieken & Propositielogica

Tomas Klos

Algoritmiek Groep

Tegenvoorbeeld

Definitie (Tegenvoorbeeld)

Een situatie waarin alle premissen waar zijn, maar de conclusie niet.

Carl Friedrich Gauss, 7 jaar oud (omstreeks 1785)

http://www.americanscientist.org/issues/pub/gausss-day-of-reckoning/

De truc van Gauss

Opdracht: Tel de getallen 1 t/m 100 bij elkaar op.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & 2 & + & \ldots & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & \ldots & + & 1 \\ \hline 101 & + & 101 & + & \ldots & + & 101 \end{array}$$

Het antwoord is dus $\frac{100 \times 101}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$.

Beroemde stelling met Inductiebewijs

Is dit voor alle getallen $n \geq 1$ zo?

n	$\sum_{i=1}^{n} i$	$\frac{n(n+1)}{2}$
1	1	$1(1+1)/2 = 1$
2	$1+2=3$	$2(2+1)/2 = 3$
3	$1+2+3=6$	$3(3+1)/2 = 6$
$\vdots$		

Bewijzen met Inductie

Voor het bewijzen van eigenschappen van natuurlijke getallen n als:

Stelling

Voor alle natuurlijke getallen $n \geq 1$ geldt $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

gebruiken we:

Het principe van volledige (mathematische) inductie

Als we kunnen bewijzen dat

(basis stap) de stelling waar is voor $n = b$, en

(inductieve stap) voor alle $n \geq b$ geldt dat
als de stelling waar is voor n,
dan de stelling ook waar is voor $n + 1$,

dan is de stelling waar voor alle $n \geq b$.

Dominostenen omgooien

Een inductiebewijs wordt vaak vergeleken met het omgooien van dominostenen:

- elke steen is een natuurlijk getal
- een steen die valt heeft de gevraagde eigenschap
- de basisstap is het omgooien van de eerste steen
- de inductieve stap zegt dat als een steen valt, de volgende ook valt, dit moet gelden voor alle stenen

Als je dus die laatste twee stappen bewijst, vallen alle stenen.
(Naar analogie hebben alle natuurlijke getallen de eigenschap.)

Is deze redenering geldig?

Definitie (Predicaat, Eigenschap)

$P(b)$ is waar desda object b eigenschap P heeft.

premisse	als $P(b)$ en voor alle $n \geq b$ geldt: als $P(n)$ dan $P(n+1)$ dan geldt $P(n)$ voor alle $n \geq b$.
premisse	voor getal $n = b$ geldt $P(n)$.
premisse	voor alle $n \geq b$ geldt: als $P(n)$ dan $P(n+1)$.
conclusie	voor alle $n \geq b$ geldt $P(n)$.

Met de eerste premisse erbij wel: het inductie-principe.

Gauss had gelijk: voor alle $n \geq 1$ geldt $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Bewijs (met inductie).

Basis ($n = 1$): $P(n)$ is waar voor $n = 1$, want dan geldt:
$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Inductie stap: Voor alle $n \geq 1$, als $P(n)$, dan $P(n+1)$

Neem een willekeurig geheel getal $k \geq 1$.

Stel: $P(k)$ is waar (inductie hypothese), dus $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$.

Te bewijzen: $P(k+1)$: $\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) =_{IH} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$
$$= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2}.$$

Volgens het inductie principe geldt $P(n)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. QED

lft

Oefening

Stelling

Voor elk natuurlijk getal $n \geq 0$ geldt dat de som van de eerste n even getallen gelijk is aan $n(n+1)$.

Opdracht:

1. schrijf deze som in wiskundige notatie
2. bewijs de stelling met inductie

TU Delft

Inductie: oefening

Stelling

Voor elk natuurlijk getal $n \geq 0$ geldt dat $\sum_{i=0}^{n} 2i = n(n+1)$.

Bewijs (met inductie).

Basis ($n = 0$): $P(n)$ is waar voor $n = 0$, want
$\sum_{i=0}^{n} 2i = \sum_{i=0}^{0} 2i = 2 \cdot 0 = 0 = 0(0+1) = n(n+1)$.

Inductie: Te bewijzen: "als $P(k)$, dan $P(k+1)$."

Stel: $P(k)$, dus $\sum_{i=0}^{k} 2i = k(k+1)$, te bewijzen
$\sum_{i=0}^{k+1} 2i = (k+1)(k+1+1)$.

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2i = \sum_{i=0}^{k} 2i + 2(k+1) \quad k+1 \text{ afsplitsen}$$
$$= k(k+1) + 2(k+1) \quad \text{volgens de IH}$$
$$= (k+1)(k+2).$$

Volgens het principe van inductie geldt $P(n)$ nu voor $n \geq 0$. QED

lft

Meer oefenen

Stelling

Voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$, $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.
Voor elk natuurlijk getal $n \geq 5$, $2^n > n^2$.
Voor elk natuurlijk getal n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.
Voor elk natuurlijk getal n, $3 \mid (n^3 - n)$.
Voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$, $\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$.
Voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$ geldt $\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

TU Delft

en verder

Definitie

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = 2$$
$$a_n = (a_{n-1})^2 / a_{n-2} \qquad \text{voor alle } n \geq 2$$

Stelling

Voor alle $n \geq 0$ geldt $a_n = 2^n$.

TU Delft

Combinaties van Bewijstechnieken: voorbeeld

invulling hangt af van inhoud en premissen

Stelling: Als p, dan q
Bewijs (van een implicatie):

- Stel: p. Te bewijzen: q
- Bewijs (met gevalsonderscheid):
  r (bijv. "x is even") is waar, of r is niet waar
  - te bewijzen: als r, dan q
    Bewijs (van een implicatie):
    - Stel: r. Te bewijzen: q
      Bewijs (uit het ongerijmde): Aanname: niet q, ...
  - te bewijzen: als niet r, dan q
    Bewijs (van de contrapositie):
    - Stel: niet q. Te bewijzen: niet niet r (dus r)
      Bewijs (uit het ongerijmde): ...

TU Delft

Practicum 1

Je moet nu opgaven 1 (helemaal) en 2.a en 2.b kunnen maken.

Denk aan het vragenuur dinsdag.

TU Delft

Propositielogica

TU Delft

Propositielogica

Een geldige redenering?

premisse	Als het regent, dan wordt de straat nat.
premisse	Het regent.
conclusie	Derhalve wordt de straat nat.

Is deze redenering geldig? Waarom?

Geldigheid van een redenering (informeel)

Een redenering is logisch geldig als in alle situaties waarin alle premissen waar zijn, ook de conclusie waar is.

TU Delft

Proposities

- Propositielogica houdt zich bezig met redeneringen (gevolgtrekkingen) over proposities.
- Een redenering is een rijtje premissen gevolgd door een conclusie
- Premissen en conclusie zijn beweringen (proposities): die kunnen alleen waar (1) of onwaar (0) zijn, bijvoorbeeld:
  - p = "het regent"
  - q = "de straat wordt nat"
  - r = "als het regent, dan wordt de straat nat" = als p, dan q
  - s = "het regent en de straat wordt nat" = p en q
  - t = "het regent niet, of de straat wordt nat" = niet p, of q

  en niet:
  - "is dit een propositie?"
  - "geef een voorbeeld van een propositie"

TU Delft

Connectieven

Een propositie is

enkelvoudig of

samengesteld opgebouwd uit proposities en voegwoorden

We gebruiken de volgende 5 voegwoorden of connectieven:

1. ... en ...
2. ... of ...
3. als ..., dan ...
4. ..., dan en slechts dan als ...
5. niet ...

dus vier 2-plaatsige en één 1-plaatsig connectief

Nota Bene: "of" is inclusief in de propositielogica

- TI1300 is onvoldoende als cijfer$_{\text{tentamen}} < 6$ of letter$_{\text{practicum}}$ = "O".

lft

Waarheidsfunctionele Connectieven

Definitie (Waarheidsfunctionele Connectieven)

Connectieven waarbij de waarheid van de (door het connectief) samengestelde propositie uitsluitend afhangt van de waarheid van de samenstellende proposities, en niet van een verband tussen die proposities.

Connectief	**Symbool**	**Interpretatie**	p	q
Conjunctie	$p \wedge q$	"p en q"	conjunct	conjunct
Disjunctie	$p \vee q$	"p of q"	disjunct	disjunct
Implicatie	$p \to q$	"als p, dan q"	antecedent	consequent
Equivalentie	$p \leftrightarrow q$	"p desda q"		
Negatie	$\neg p$	"niet p"		

TU Delft

Connectieven in Natuurlijke vs. Formele Taal

- Frans is logicus, maar hij heeft gevoel voor humor.
  Hier is geen logisch equivalent voor.
- Als Delft in Zuid-Holland ligt, dan is 7 een priemgetal.
  In natuurlijke taal, hangt de waarheid hiervan ook af van het verband tussen p en q, niet alleen van de waarheid van p en q.
- Sarah is getrouwd en (Sarah) heeft een baby gekregen
- Sarah heeft een baby gekregen en (Sarah) is getrouwd
  Deze zinnen zijn logisch identiek ('en' heeft geen tijdsaspect)
- Het connectief 'of' wordt inclusief gebruikt, dus
  "het regent of de zon schijnt"
  is (logisch) ook waar als het regent en de zon schijnt

TUDelft

Het Hoofdconnectief

Elke samengestelde propositie heeft een hoofdconnectief:

- ik gebruik linux of ik gebruik windows, en mijn pc crasht

$$(l \vee w) \wedge c$$

- ik gebruik linux, of ik gebruik windows en mijn pc crasht

$$l \vee (w \wedge c)$$

dus gebruik haakjes om ambiguïteit te vermijden, regels:

- wel om $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \to q)$, $(p \leftrightarrow q)$
- niet om $\neg p$
- conventie: niet om de complete samengestelde propositie

TUDelft

Vertalen naar propositielogica

Voorbeelden:

- Mijn programma is correct of het termineert niet
  c = "mijn programma is correct"
  t = "mijn programma termineert"
  vertaling: $c \vee \neg t$
  of: $t \to c$
  of: $\neg c \to \neg t$
  of: $\neg(t \wedge \neg c)$
- Mijn pc heeft geen problemen als ik geen Windows gebruik
  p = "mijn pc heeft problemen"
  w = "ik gebruik Windows"
  vertaling: $\neg w \to \neg p$
  of: $p \to w$
  of: $\neg p \vee w$

TUDelft

Oefening: Vertalen van propositielogica

f = "ik fiets," r = "het regent," t = "ik blijf thuis"
wat betekenen deze formules en wat is het hoofdconnectief?

1. $r \to (\neg f \wedge t)$
2. $\neg(r \wedge (f \vee \neg t))$

Vertaling (2 minuten):

1. als het regent, dan fiets ik niet en blijf ik thuis
2. het is niet zo dat het regent en ik fiets of niet thuis blijf
   oftewel: als het regent, dan fiets ik niet en blijf ik thuis

Equivalenties

Beschrijven en Bewijzen, stelling 2.9, pagina 31.

TUDelft