TI1300: Redeneren en Logica

College 4: Waarheidstafels, Redeneringen, Syntaxis van *PROP*

Tomas Klos

Algoritmiek Groep

TU Delft

Mededelingen

- Voor de Fibonacci getallen geldt $f_0 = f_1 = 1$ (niet 0)
- Practicum 1
  - Practicum 1.3.c: "vraag (i)" moet zijn "vraag (a)"
  - Vragenuur na dit college, in zaal E
  - Je hebt om het template te compileren 2 packages nodig:
    - fitch.sty `http://folk.uio.no/johanw/fitch.sty` (voor practicum 2)
    - atbeginend.sty `http://www.eng.cam.ac.uk/help/tpl/textprocessing/atbeginend.sty` (wordt niet gebruikt, delete of comment: %)
- Bereid colleges voor, alsjeblieft!

TU Delft

Waarheidsfunctionele Connectieven

Definitie (Waarheidsfunctionele Connectieven)

Connectieven waarbij de waarheid van de (door het connectief) samengestelde propositie uitsluitend afhangt van de waarheid van de samenstellende proposities, en niet van een verband tussen die proposities.

Hoe hangt de waarheid van de samengestelde propositie af van de waarheid van de samenstellende proposities?

TU Delft

Waarheidstafels

Definitie (Waarheidstafel)

Een waarheidstafel definieert de waarheidswaarde van door connectieven samengestelde proposities.

		"p en q"	"p of q"			
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$	$\neg p$
0	0	␣	␣	␣	␣	␣
0	1	␣	␣	␣	␣	␣
1	0	␣	␣	␣	␣	␣
1	1	␣	␣	␣	␣	␣

Conventie: orden de rijen als oplopende binaire getallen

TU Delft

Waarheidstafel Negatie

	“niet p”
p	$\neg p$
0	1
1	0

TU Delft

Waarheidstafel Conjunctie

		“p en q”
p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

TU Delft

Waarheidstafel Disjunctie

		“p of q”
p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

TU Delft

Waarheidstafel Implicatie

		“als p, dan q”
p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

TU Delft

Extra uitleg

Een ware uitspraak

Als $x > 6$, dan $x > 2$.

	$(x > 6)$	$\rightarrow$	$(x > 2)$
$x = 1$	0	1	0
$x = 4$	0	1	1
$x = 10$	1	1	1

TU Delft

Waarheidstafel Equivalentie

p	q	"p, desda q" $p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

TU Delft

Opdracht: waarheidstafel voor Complexere Formule

$$((r \rightarrow n) \wedge r) \rightarrow n$$

$r =$ "het regent," $n =$ "de straat wordt nat"

(als het waar is dat)	als het regent, (dan) de straat nat wordt, en
(dat)	het regent,
(dan is het waar dat)	de straat nat wordt.

r	n	((	r	$\rightarrow$	n	)	$\wedge$	r	)	$\rightarrow$	n
0	0		0	1	0		0	0		**1**	0
0	1		0	1	1		0	0		**1**	1
1	0		1	0	0		0	1		**1**	0
1	1		1	1	1		1	1		**1**	1

TU Delft

Tautologie, contradictie, en contingentie

Definitie (Tautologie)

Een propositie P is een tautologie desda P niet onwaar kan zijn.

Definitie (Contradictie)

Een propositie P is een contradictie desda P niet waar kan zijn.

Definitie (Contingentie)

Een propositie P is een contingentie desda P noch een tautologie noch een contradictie is.

Definitie (Logische Equivalentie)

Twee proposities P en Q heten logisch equivalent desda $P \leftrightarrow Q$ een tautologie is.

lft

Oefenen: een Logische Equivalentie

Contrapositie:

$$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$$

p	q	(	p	$\to$	q	)	$\leftrightarrow$	(	$\neg q$	$\to$	$\neg p$	)
0	0		0	1	0		**1**		1	1	1	
0	1		0	1	1		**1**		0	1	1	
1	0		1	0	0		**1**		1	0	0	
1	1		1	1	1		**1**		0	1	0	

TUDelft

Opdrachten met waarheidstafels

Ga na of de volgende proposities tautologieën, contradicties of contingenties zijn:

- $p \vee \neg p$
- $\neg p \to (p \to q)$
- $((p \to q) \to p) \to p$
- $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
- $(p \vee q) \to ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$
- $\neg(p \to (q \to p))$

Ga na of deze formules logisch equivalent zijn:

- $\neg(p \vee q)$ en $\neg p \wedge \neg q$
- $p \wedge (q \vee r)$ en $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- $p \to (q \wedge r)$ en $(p \to q) \wedge (p \to r)$

TUDelft

Nog enkele equivalenties

zie ook *Beschrijven & Bewijzen*, p. 31, en *Logica*, p. 52

$$\begin{aligned}
\neg(p \vee q) &\equiv \neg p \wedge \neg q \\
p \vee q &\equiv \neg\neg(p \vee q) \\
&\equiv \neg(\neg p \wedge \neg q) \\
\neg(p \wedge q) &\equiv \neg p \vee \neg q \\
p \to q &\equiv \neg p \vee q \\
&\equiv \neg q \to \neg p \\
\neg(p \to q) &\equiv p \wedge \neg q \\
p \leftrightarrow q &\equiv (p \to q) \wedge (q \to p) \\
&\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\
p \wedge (q \vee r) &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\
p \to (q \wedge r) &\equiv (p \to q) \wedge (p \to r)
\end{aligned}$$

TUDelft

Redeneringen en Waarheidstafels

Logica, sectie 3.2, p. 34ff

Definitie (Geldigheid van een redenering (informeel))

Een redenering is correct of logisch geldig wanneer we gedwongen zijn de conclusie voor waar aan te nemen als we de premissen voor waar aannemen.

Met symbolen:

Definitie (Logische Geldigheid (informeel))

Een redenering $A_0, A_1, \ldots, A_n \therefore B$ is logisch geldig als in alle omstandigheden waarin $A_0, A_1, \ldots, A_n$ waar zijn, ook B waar is.

$$\begin{array}{rl} & r \to n \\ & r \\ \hline \therefore & n \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & p \to q \\ & q \to r \\ \hline \therefore & p \to r \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & p \vee q \\ & q \vee r \\ \hline \therefore & p \vee r \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & p \to q \\ & q \to \neg r \\ \hline \therefore & r \to \neg p \end{array}$$

TUDelft

Geldigheid en Waarheidstafels

Definitie (Geldige Redenering)

Een redenering is geldig *als voor de waarheidstafel van de formules in de redenering geldt:*

> *in alle rijen waar alle premissen tegelijkertijd de waarde 1 hebben, heeft ook de conclusie de waarde 1.*

Definitie (Ongeldige Redenering)

Een redenering is ongeldig *als voor de waarheidstafel van de formules in de redenering geldt:*

> *er bestaat een rij waarin alle premissen tegelijkertijd de waarde 1 hebben, maar de conclusie de waarde 0.*

Een dergelijke rij heet een tegenvoorbeeld.

Oefening: $p \vee q, q \vee r \therefore p \vee r$

Bepaal mbv een waarheidstafel of deze redenering geldig is:

$$p \vee q, q \vee r \therefore p \vee r$$

	p	q	r	p	$\vee$	q	,	q	$\vee$	r	$\therefore$	p	$\vee$	r
1	0	0	0	0	0	0		0	0	0				
2	0	0	1	0	0	0		0	1	1				
3	0	1	0	0	**1**	1		1	**1**	0	*	0	**0**	0
4	0	1	1	0	**1**	1		1	**1**	1	*	0	**1**	1
5	1	0	0	1	1	0		0	0	0				
6	1	0	1	1	**1**	0		0	**1**	1	*	1	**1**	1
7	1	1	0	1	**1**	1		1	**1**	0	*	1	**1**	0
8	1	1	1	1	**1**	1		1	**1**	1	*	1	**1**	1

Dus de redenering $p \vee q, q \vee r \therefore p \vee r$ is niet geldig.
Een tegenvoorbeeld is $v(p) = v(r) = 0, v(q) = 1$.

Oefening: $p \to q, q \to \neg r \therefore r \to \neg p$

Bepaal mbv een waarheidstafel of deze redenering geldig is:

$$p \to q, q \to \neg r \therefore r \to \neg p$$

p	q	r	p	$\to$	q	,	q	$\to$	$\neg$	r	$\therefore$	r	$\to$	$\neg$	p
0	0	0	0	**1**	0		0	**1**	1	0	*	0	**1**	1	0
0	0	1	0	**1**	0		0	**1**	0	1	*	1	**1**	1	0
0	1	0	0	**1**	1		1	**1**	1	0	*	0	**1**	1	0
0	1	1	0	1	1		1	0	0	1					
1	0	0	1	0	0		0	1	1	0					
1	0	1	1	0	0		0	1	0	1					
1	1	0	1	**1**	1		1	**1**	1	0	*	0	**1**	0	1
1	1	1	1	1	1		1	0	0	1					

Dus de redenering $p \to q, q \to \neg r \therefore r \to \neg p$ is wel geldig.

Waarheidstafel voor een Redenering: Oefening

Beschrijven en Bewijzen, p. 26 of *Logica*, p. 30

Ga na of de volgende redeneringen geldig zijn:

- $p \to (q \wedge r), q \to \neg r \therefore \neg p$
- $\neg p \to (q \wedge \neg r), \neg q \to \neg r \therefore p$

De taal $\mathcal{P}$ van de propositielogica: alfabet

De taal van de propositielogica heet $\mathcal{P}$.
Een taal kent een syntax (alfabet en grammatica) en een semantiek.

Definitie (Het alfabet van $\mathcal{P}$)

Het alfabet van $\mathcal{P}$ bestaat uit:

1. *propositiesymbolen* $p_0, p_1, p_2, \ldots$ $(p_i, i \in \mathbb{N})$; $p, q, r, \ldots$
2. *connectieven:* $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
3. *hulpsymbolen (haakjes): "(" en ")"*

TUDelft

De taal $\mathcal{P}$ van de propositielogica: grammatica

Een grammatica zegt welke rijen symbolen formules zijn.

Definitie (De verzameling $PROP$)

De verzameling $PROP$ van formules van $\mathcal{P}$ is de kleinste verzameling rijtjes over het alfabet van $\mathcal{P}$ zodanig dat:

1. $p_i \in PROP$, *voor iedere* $i \in \mathbb{N}$;
2. *als* $A, B \in PROP$, *dan* $\neg A, (A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B) \in PROP$.

Dit is een recursieve definitie van $PROP$.

TUDelft

De verzameling $PROP$

$$
\begin{aligned}
PROP = \{ & p_0, p_1, p_2, \ldots, \\
& \neg p_0, \neg p_1, \neg p_2, \ldots, \\
& (p_0 \vee p_0), (p_0 \vee p_1), (p_1 \vee p_0), (p_0 \vee p_2), \ldots, \\
& \neg(p_0 \vee p_0), \neg(p_0 \vee p_1), \neg(p_1 \vee p_0), \neg(p_0 \vee p_2), \ldots, \\
& (p_0 \wedge p_0), (p_0 \wedge p_1), (p_1 \wedge p_0), (p_0 \wedge p_2), \ldots, \\
& (p_0 \rightarrow p_0), (p_0 \rightarrow p_1), (p_1 \rightarrow p_0), (p_0 \rightarrow p_2), \ldots, \\
& (p_0 \vee (p_0 \vee p_0)), (p_0 \vee (p_0 \vee p_1)), \ldots, \\
& \neg(p_0 \vee (p_0 \vee p_0)), \neg(p_0 \vee (p_0 \vee p_1)), \ldots \}
\end{aligned}
$$

Conventies

- We schrijven *soms* $p, q, r, s, \ldots$ in plaats van $p_0, p_1, \ldots$.
- We schrijven *soms* geen buitenste haakjes, dus $p \vee (q \wedge r)$ in plaats van $(p \vee (q \wedge r))$.

lft

Voorbeeld: is $\neg(p_0 \rightarrow (p_7 \vee p_2)) \in PROP$?

$\neg(p_0 \rightarrow (p_7 \vee p_2)) \in PROP$ als

- $p_0 \rightarrow (p_7 \vee p_2)) \in PROP$ als
  - $p_0 \in PROP$ en
  - $p_7 \vee p_2 \in PROP$ als
    - $p_7 \in PROP$
    - $p_2 \in PROP$

TUDelft

Formules en Subformules

Zelf bestuderen: *Logica*, p. 16–17

TU Delft

Normaalvormen

Zelf bestuderen:

- *Beschrijven en Bewijzen*, 2.5, p. 32,
- *Logica*, 4.3, p. 51

TU Delft

Inductie

Waarom werkt de bewijstechniek volledige inductie?

Omdat het bewijs de structuur van $\mathbb{N}$ volgt.

De verzameling $\mathbb{N}$, recursief gedefinieerd

$\mathbb{N}$ is de kleinste verzameling zodat:

- 0 een natuurlijk getal is, (we schrijven $0 \in \mathbb{N}$),
- als $x \in \mathbb{N}$, dan $x + 1 \in \mathbb{N}$.

Structurele inductie

Bewijstechniek om te bewijzen dat alle formules in *PROP* bepaalde eigenschappen bezitten.
Het principe van inductie garandeert generalisatie naar *alle* formules in *PROP* (zie *Logica*, stelling 2.3.5, p. 20).

Structurele Inductie

Logica, 2.3, p. 18

Definitie (Structurele Inductie over *PROP*)

Zij E een eigenschap van formules uit PROP. Door middel van structurele inductie over PROP bewijzen dat E geldt voor alle formules $F \in PROP$, vereist een bewijs van de volgende stellingen:

1 $E(p_i)$ *geldt voor alle propositiesymbolen* $p_i \in PROP$ $(i \in \mathbb{N})$;

2a *als* $E(A)$ *geldt, dan geldt* $E(\neg A)$ $(A \in PROP)$

2b *als* $E(A)$ *en* $E(B)$ *gelden, dan geldt* $E((A \star B))$
$(A, B \in PROP, \star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\})$

TU Delft

Structurele Inductie: werkwijze

Om te bewijzen dat een eigenschap E geldt voor alle $F \in PROP$:

- **basisstap** Toon aan dat $E(F)$ geldt voor $F = p_i$ (dus: alle propositievariabelen hebben eigenschap E).
- **inductiestap** Te bewijzen is dat: Als $E(A)$ en $E(B)$ gelden voor *willekeurige* formules A en B (de inductiehypothese), dan ook geldt $E(\neg A)$ en $E((A \star B))$ (waar $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$)

TU Delft

Voorbeeld: bewijs met Structurele Inductie

Recursieve definities: *Logica*, 2.4, p. 21

Stelling

In elke formule $F \in PROP$ is het aantal haakjes even.

Definitie (De functie $h : PROP \mapsto \mathbb{N}$ voor het aantal haakjes)

Het aantal haakjes in formule F wordt gegeven door de functie $h : PROP \mapsto \mathbb{N}$, recursief gedefinieerd:

$$\begin{aligned} h(p_i) &= 0 && \text{voor alle } p_i \in PROP \\ h(\neg A) &= h(A) && \text{voor alle } A \in PROP \\ h((A \star B)) &= h(A) + h(B) + 2 && \text{voor alle } A, B \in PROP \end{aligned}$$

TU Delft

Voorbeeld: bewijs met Structurele Inductie

Bewijs (met structurele inductie).

Zij $P(F)$ waar voor F als het aantal haakjes $h(F)$ even is.

- **basisstap** $P(F)$ geldt voor $F = p_i$ ($i \in \mathbb{N}$), want $h(p_i) = 0$ en 0 is even.
- **inductiestap** Stel dat $P(F)$ geldt voor $F = A, B \in PROP$ (IH). Te bewijzen: $P(F)$ geldt voor $F = \neg A$ en $F = (A \star B)$.
  - $F = \neg A$: aangezien $h(\neg A) = h(A)$ en $h(A)$ even is (volgens de IH), geldt dat ook $h(\neg A)$ even is.
  - $F = (A \star B)$: omdat $h((A \star B)) = h(A) + h(B) + 2$ en zowel $h(A)$ als $h(B)$ even zijn (IH), geldt dat $h((A \star B))$ ook even is.

QED

TU Delft

Oefening

Stelling

Voor elke formule $F \in PROP$ geldt: $p(F) = h(F)/2 + 1$.

Opdracht

- Geef een recursieve definitie van de functie $p : PROP \mapsto \mathbb{N}$ die aan elke formule $F \in PROP$ het aantal (voorkomens van) propositievariabelen toekent.
- Geef een bewijs met structurele inductie van de stelling. Geef duidelijk aan wat de basisstap en de inductiestap (met de verschillende gevallen) zijn, en vergeet ook de inductiehypothese niet.

TU Delft

Oefening: Uitwerking

Definitie (Aantal (voorkomens van) propositievariabelen)

De functie $p : PROP \mapsto \mathbb{N}$ wordt als volgt recursief gedefinieerd:

$$
\begin{aligned}
p(p_i) &= 1 && \text{voor alle } i \in \mathbb{N}\\
p(\neg A) &= p(A) && \text{voor alle } A \in PROP\\
p((A \star B)) &= p(A) + p(B) && \text{voor alle } A, B \in PROP
\end{aligned}
$$

Voor all $F \in PROP$ geldt: $p(F) = h(F)/2 + 1$.

Bewijs.

Zij $P(F)$ waar als voor F geldt dat $p(F) = h(F)/2 + 1$.

basis ($F = p_i$): Voor $F = p_i$ geldt $P(F)$, want $p(F) = 1 = 0/2 + 1 = h(F)/2 + 1$.

inductie: Stel dat $P(F)$ geldt voor $F = A$ en B, dus dat $p(A) = h(A)/2 + 1$ en $p(B) = h(B)/2 + 1$ (IH). Te bewijzen is dat $P(\neg A)$ en $P((A \star B))$, dus dat $p(\neg A) = h(\neg A)/2 + 1$ en dat $p((A \star B)) = h((A \star B))/2 + 1$.

$F = \neg A$: Als $F = \neg A$ geldt:
$p(\neg A) = p(A) =_{\text{IH}} h(A)/2 + 1 = h(\neg A)/2 + 1$.

$F = (A \star B)$: Als $F = (A \star B)$ geldt
$p((A \star B)) = p(A) + p(B) =_{\text{IH (A)}} h(A)/2 + 1 + p(B) =_{\text{IH (B)}} h(A)/2 + 1 + h(B)/2 + 1 = (h(A)+h(B)+2)/2+1 = h((A\star B))/2+1$. QED