## TI1300: Redeneren en Logica

College 5: Semantiek van de Propositielogica

Tomas Klos

Algoritmiek Groep

TU Delft



## Mededelingen

Tip: Als ik je vraag de recursieve definitie van een functie over *PROP* op te schrijven, test je functie dan altijd op een aantal formules!

Practicum: Na dit college moet je practicum 1 (kunnen) maken, de deadline is a.s. vrijdag 10:45 uur.

TU Delft



## Minder connectieven nodig

Mogelijke invulling (er zijn andere):

| | $\neg$ en $\wedge$ | $\neg$ en $\vee$ | $\neg$ en $\rightarrow$ |
|---|---|---|---|
| $\neg p$ | $\neg p$ | $\neg p$ | $\neg p$ |
| $p \wedge q$ | $p \wedge q$ | $\neg(\neg p \vee \neg q)$ | $\neg(p \rightarrow \neg q)$ |
| $p \vee q$ | $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ | $p \vee q$ | $\neg p \rightarrow q$ |
| $p \rightarrow q$ | $\neg(p \wedge \neg q)$ | $\neg p \vee q$ | $p \rightarrow q$ |
| $p \leftrightarrow q$ | $\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)$ | $\neg(p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee \neg q)$ | $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow q)$ |

**Het kan met nog minder**

Sole sufficient connectieven zijn:

- Sheffer stroke $p \uparrow q$ is NAND, dus $\neg(p \wedge q)$
- Quine dagger $p \downarrow q$ is NOR, dus $\neg(p \vee q)$



## Metavariabelen

*Logica*, p. 15–16

- $A$ en $B$ behoren *niet* tot $\mathcal{P}$.
  Het zijn metavariabelen, die als waarde een formule hebben.
- Een andere metavariabele: $\star$
  de waarde van $\star$ is een 2-plaatsig connectief ($\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, of $\leftrightarrow$)

TU Delft

## Normaalvormen

*Beschrijven & Bewijzen*, p. 32, *Logica*, p. 51

**Definitie (Normaalvorm)**

*Een standaard uitdrukkingsvorm voor formules.*

De 16 connectieven kunnen m.b.v. $\wedge$, $\vee$ en $\neg$ worden uitgedrukt. Neem de waarheidstafel van een willekeurige propositie $A$ (alleen de rijen waarin $A$ waar is):

| p | q | r | s | A |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Dit kun je dus schrijven als

$$A \equiv (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s)$$

Dit is de disjunctieve normaalvorm van $A$

TUDelft



## Atomen, Literalen, Complementen

**Definitie (Atoom)**

*Een atoom is een formule van de vorm* $p_i$.

**Definitie (Literaal)**

*Een literaal is een formule van de vorm* $p_i$ *of* $\neg p_i$.

**Definitie (Complementaire literalen)**

*Complementaire literalen zijn twee literalen van de vorm* $p_i$ *en* $\neg p_i$.

TUDelft



## Disjunctieve Normaalvorm

**Definitie (Disjunctieve normaalvorm (DNV of DNF))**

*Een formule $A$ staat in DNV als $A$ een disjunctie van conjuncties van literalen is:*

$$(L_{11} \wedge L_{12} \wedge \ldots \wedge L_{1m_1}) \vee \ldots \vee (L_{n1} \wedge L_{n2} \wedge \ldots \wedge L_{nm_n})$$

**Stelling**

*Elke formule $A$ is logisch equivalent met een formule in DNV.*

TUDelft



## Conjunctieve Normaalvorm

**Definitie (Conjunctieve normaalvorm (CNV of CNF))**

*Een formule $A$ staat in CNV als $A$ een conjunctie van disjuncties van literalen is:*

$$(L_{11} \vee L_{12} \vee \ldots \vee L_{1m_1}) \wedge \ldots \wedge (L_{n1} \vee L_{n2} \vee \ldots \vee L_{nm_n})$$

**Stelling**

*Elke formule $A$ is logisch equivalent met een formule in CNV.*

TUDelft

## Bewijs van de stellingen (constructief)

Herschrijf iedere subformule van $A$ (van links naar rechts):

$$
\begin{aligned}
\neg\neg A &\equiv A \\
A \leftrightarrow B &\equiv (A \to B) \wedge (B \to A) \\
&\equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \\
\neg(A \leftrightarrow B) &\equiv \neg(A \to B) \vee \neg(B \to A) \\
&\equiv \neg(A \wedge B) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg B) \\
A \to B &\equiv \neg A \vee B \\
\neg(A \to B) &\equiv A \wedge \neg B \\
\neg(A \vee B) &\equiv \neg A \wedge \neg B \\
\neg(A \wedge B) &\equiv \neg A \vee \neg B \\
A \vee (B \wedge C) &\equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \\
A \wedge (B \vee C) &\equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)
\end{aligned}
$$

TUDelft



## Opdracht: breng in CNV en DNV

- $\neg(p \wedge (q \to r))$
- $((p \to q) \to p) \to p$

Merk op:

- $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$, we schrijven $(p \vee q \vee r)$
- $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$, we schrijven $(p \wedge q \wedge r)$

**Opmerking**

Vaak zitten formules in DNV en CNV niet in *PROP*.

TUDelft



## Normaalvormen en Logische Geldigheid van redeneringen

Normaalvormen geven ons nog een methode (naast waarheidstafels) om logische geldigheid van redeneringen vast te stellen.

Zij $A_1, A_2, \ldots, A_n \therefore B$ een redenering.

- breng $(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \to B$ in CNV
- als elk conjunctielid een paar complementaire literalen bevat
  - is de implicatie een tautologie
  - is de redenering logisch geldig

**Oefening**: $\neg n, \neg b \to (t \wedge \neg n), \neg b \therefore \neg t$

TUDelft



## Semantiek van $\mathcal{P}$

*Logica*, H3, sectie 3.1

**Doel van de semantiek (betekenistheorie)**

Op systematische wijze aan formules waarheidswaarden toekennen.

**Observatie (waarheidsfunctionaliteit)**

De waarheidswaarde die formule $F$ krijgt, is slechts afhankelijk van de waarheidswaarden van de propositievariabelen in $F$.

**Definitie (Valuatie (of Interpretatie))**

*Een valuatie $v$ is een functie die aan iedere propositievariabele $p_i$ van $\mathcal{P}$ een waarheidswaarde $v(p_i) \in \mathbb{B}$ toekent, waar $\mathbb{B} = \{0, 1\}$.*

TUDelft

## Valuaties en Rijen in Waarheidstafels

| $p$ | $q$ | $((p \to q)$ | $\wedge$ | $p)$ | $\to$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Een valuatie is een *functie* over *alle* propositievariabelen.
Elke rij in een waarheidstafel correspondeert met *alle* valuaties die de propositievariabelen de waarden in de rij geven.

| | ... | $o$ | $p$ | $q$ | $r$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| valuatie 1 | ... | 0 | 1 | 1 | 0 | ... |
| valuatie 2 | ... | 0 | 1 | 1 | 1 | ... |
| valuatie 3 | ... | 1 | 1 | 1 | 0 | ... |
| valuatie 4 | ... | 1 | 1 | 1 | 1 | ... |

TU Delft



## Waarheidsfuncties
*Logica*, p. 31

| $x$ / $p$ | $y$ / $q$ | $f_\neg(x)$ / $\neg p$ | $f_\vee(x,y)$ / $p \vee q$ | $f_\wedge(x,y)$ / $p \wedge q$ | $f_\to(x,y)$ / $p \to q$ | $f_\leftrightarrow(x,y)$ / $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**Waarheidsfuncties van de connectieven ($x$ en $y$ als getallen)**

$$\begin{aligned} f_\neg(x) &= (1-x), \\ f_\vee(x,y) &= \max(x,y), \\ f_\wedge(x,y) &= \min(x,y), \\ f_\to(x,y) &= \max(1-x,y), \\ f_\leftrightarrow(x,y) &= \begin{cases} 1 & \text{als } x = y \\ 0 & \text{anders} \end{cases} \end{aligned}$$

lft



## Waarheidswaarde van een formule
*Logica*, p. 31

De waarheidswaarde van een formule m.b.t. een gegeven valuatie $v$ kan nu recursief worden gedefinieerd als een functie $v^+ : PROP \to \mathbb{B}$, waar $\mathbb{B} = \{0,1\}$:

$$\begin{aligned} v^+(p_i) &= v(p_i) \\ v^+(\neg A) &= f_\neg(v^+(A)) \\ v^+((A \star B)) &= f_\star(v^+(A), v^+(B)) \end{aligned}$$

Dus $v$ geeft de waarheidswaarde van propositiesymbolen,
$v^+$ geeft waarheidswaarden van formules in *PROP*.

Omdat $v^+$ vast ligt zodra $v$ gegeven is, gebruiken we enkel '$v$.'

TU Delft



## Waarheidsfuncties voorbeeld

Gegeven een valuatie $v$ waarvoor $v(p) = 1$ en $v(q) = 0$.
Wat is de waarheidswaarde van $F = \neg p \to q$?

$$\begin{aligned} v(\neg p \to q) &= f_\to(v(\neg p), v(q)) \\ &= f_\to(f_\neg(v(p)), v(q)) \\ &= f_\to(f_\neg(1), 0) \\ &= f_\to(1-1, 0) \\ &= f_\to(0,0) \\ &= \max(1-0, 0) \\ &= 1. \end{aligned}$$

TU Delft

## Waarheidsfuncties Opdracht

**Gegeven**: een valuatie $v$ waarvoor $v(p) = 1, v(q) = 0, v(r) = 1$.
**Opdracht**: wat is de waarheidswaarde van $\neg(p \to (q \wedge r))$?
**Uitwerking**:

$$\begin{aligned}
v(\neg(p \to (q \wedge r))) &= f_\neg(v(p \to (q \wedge r))) \\
&= f_\neg(f_\to(v(p), v(q \wedge r))) \\
&= f_\neg(f_\to(v(p), f_\wedge(v(q), v(r)))) \\
&= f_\neg(f_\to(1, f_\wedge(0, 1))) \\
&= f_\neg(f_\to(1, \min(0, 1))) \\
&= f_\neg(f_\to(1, 0)) \\
&= f_\neg(\max(1-1, 0)) \\
&= f_\neg(0) \\
&= 1 - 0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

TUDelft



## Model, Vervulbaarheid

*Logica*, p. 34–35

**Definitie (Model van een formule)**

*Een model van een formule $A$ is een valuatie $v$ met $v(A) = 1$; $A$ is vervulbaar; $v$ vervult $A$.*

**Definitie (Model van een verzameling formules)**

*Een valuatie $v$ is een model van een verzameling formules $\Gamma$ als $v$ een model is voor iedere formule $A \in \Gamma$.*

**Definitie (Vervulbaarheid van een formule)**

*Een formule $A$ is vervulbaar als $A$ een model heeft en onvervulbaar anders.*

TUDelft



## Voorbeelden

Gegeven zijn de formules $F = p \wedge \neg q$ en $G = \neg q \to r$.

- elke valuatie $v$ met $v(p) = 1$ en $v(q) = 0$ is een model van $F$.
- $F$ is dus vervulbaar; $F$ wordt vervuld door $v$; $v$ vervult $F$.
- elke valuatie $v$ met $v(q) = 1$ of $v(r) = 1$ is een model voor $G$.
- elke valuatie $v$ met $v(p) = 1, v(q) = 0$ en $v(r) = 1$ is een model van $\Gamma = \{F, G\}$.

TUDelft



## Oefening

**Beschouw de formule $F = (p \vee \neg q \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee q \vee \neg p \vee r)$.**

- Heeft formule $F$ een model? (Is $F$ vervulbaar?)
- Zo ja, geef een model van formule $F$.
- ... hoeveel modellen heeft $F$? (verschillend in $p, q$ en $r$)

**Beschouw de formule $G = ((p \to \neg q) \to p) \to p$.**

- Is $G$ vervulbaar?
- Zo ja, geef één model van $G$.

TUDelft

## Logisch gevolg, logische geldigheid, tegenmodel

*Logica*, p. 34–35

**Definitie (Logisch Gevolg)**

*Een formule $C$ is een logisch gevolg van een verzameling formules $\Gamma$ ('gamma') als ieder model voor $\Gamma$ ook een model voor $C$ is.*
*We schrijven* $\Gamma \models C$ *voor "$C$ is een logisch gevolg van $\Gamma$."*
*Een redenering $\Gamma \mathrel{.\!\cdot\!.} C$ is logisch geldig desda $\Gamma \models C$.*

**Definitie (Tegenmodel)**

*Een tegenmodel tegen een redenering $A_1, \ldots, A_n \mathrel{.\!\cdot\!.} C$ is een valuatie $v$ die een model is voor $\{A_1, \ldots, A_n\}$ maar niet voor $C$.*

**Definitie (Tautologie)**

*Een formule $F$ is een tautologie,* $\models F$, *als iedere valuatie een model voor $F$ is (dus $F$ waar maakt). We noemen $F$ dan ook algemeen geldig.*



## Meta-beweringen

**Meta-beweringen**

Beweringen over relaties tussen $\models$-uitspraken, die waar en onwaar kunnen zijn. Een ware meta-bewering is een meta-stelling, dus met bewijs.
Onwaarheid wordt aangetoond met een tegenvoorbeeld.
(Denk aan de beweringen over relaties tussen $x \mid y$ uitspraken.)

**Voorbeeld van een metabewering**

Voor alle formules $A, B \in PROP$ geldt: als $A \models B$, dan $\models A \to B$.
Dus: Als $A$ en $B$ zodanige formules zijn dat $A \models B$, dan geldt ook dat $\models A \to B$.



## Aanpak: als $A \models B$, dan $\models A \to B$

- Bepaal of de bewering waar of onwaar is (stel: waar)
- Bekijk de structuur van de bewering (een implicatie)
- Neem het antecedent aan, leidt het consequent af.
- Schrijf uit wat je aanneemt, hier:
  Voor alle valuaties waarvoor $v(A) = 1$ is $v(B) = 1$.
- Schrijf op wat 'te bewijzen' is, hier:
  Voor alle valuaties geldt $v(A \to B) = 1$.
- Voor alle bewijs: Neem een willekeurige valuatie, $w$.
  Laat zien dat $w(A \to B) = 1\ldots$
- Omdat $w$ willekeurig was gekozen, geldt voor alle valuaties dat $v(A \to B) = 1$, dus dat $\models A \to B$.



## Aanpak: als $\models A \to B$, dan $A \models B$

- Bepaal of de bewering waar of onwaar is (stel: waar)
- Bekijk de structuur van de bewering (een implicatie)
- Neem het antecedent aan, leidt het consequent af.
- Schrijf uit wat je aanneemt, hier:
  Voor alle valuaties geldt dat $v(A \to B) = 1$.
- Schrijf op wat 'te bewijzen' is, hier:
  Voor alle valuaties waarvoor $v(A) = 1$ is $v(B) = 1$.
- Voor alle bewijs: Neem een willekeurige valuatie, $w$, waarvoor $w(A) = 1$.
  Laat zien dat $w(B) = 1\ldots$
- Omdat $w$ willekeurig was gekozen, geldt voor alle valuaties waarvoor $v(A) = 1$ dat $v(B) = 1$, dus dat $A \models B$.

## Als $A \models B$, dan $\models A \to B$, voor alle $A, B \in PROP$.

**Bewijs.**

Stel dat $A \models B$ waar is. Dan geldt dus voor alle valuaties dat als $v(A) = 1$, dan $v(B) = 1$.Te bewijzen is dat $\models A \to B$, dus dat voor alle valuaties geldt $v(A \to B) = 1$. Neem dus een willekeurige valuatie, $w$, te bewijzen is dat
$w(A \to B) = \max(1 - w(A), w(B)) = 1$. We onderscheiden twee gevallen:

- $w(A) = 0$ dan is $\max(1 - w(A), w(B)) = \max(1 - 0, w(B)) = 1$ (ongeacht $w(B)$).
- $w(A) = 1$ dan is $w(B) = 1$ volgens het antecedent, dus is $\max(1 - w(A), w(B)) = \max(1 - 1, 1) = 1$.

In beide gevallen is $w(A \to B) = 1$, en omdat $w$ willekeurig was gekozen, geldt $\models A \to B$. QED



## Voorbeeld van een meta-stelling

**Stelling**

*Voor alle $A, B \in PROP$ geldt: $A, A \to B \models B$.*

**Bewijs.**

Te bewijzen is dat voor alle valuaties waarvoor $v(A) = v(A \to B) = 1$, geldt dat $v(B) = 1$. Neem dus een willekeurig model voor $A$ en $A \to B$, zeg $w$. Te bewijzen is dat $w(B) = 1$.
$w(A) = w(A \to B) = 1$, dus $w(A \to B) =$
$\max(1 - w(A), w(B)) = \max(1 - 1, w(B)) = \max(0, w(B)) = 1$, dus moet $w(B) = 1$ zijn.
Omdat $w$ willekeurig was gekozen geldt voor alle valuaties waarvoor $v(A) = v(A \to B) = 1$ dat $v(B) = 1$, dus dat $A, A \to B \models B$. QED



## Nog een meta-stelling

**Stelling**

*Als $\models A$ en $\models B$, dan $\models A \wedge B$.*

**Bewijs.**

Stel: $\models A$ en $\models B$, dus voor alle valuaties geldt dat $v(A) = v(B) = 1$.
Neem een willekeurige valuatie $w$, te bewijzen is dat $w(A \wedge B) = 1$. Ook voor $w$ geldt $w(A) = w(B) = 1$, dus $w(A \wedge B) = \min(w(A), w(B)) = \min(1, 1) = 1$. Omdat $w$ willekeurig was gekozen, geldt voor alle valuaties dat $v(A \wedge B) = 1$, dus dat $\models A \wedge B$. QED

TUDelft



## Oefening meta-stellingen

Bewijs de volgende meta-stellingen voor alle $A, B \in PROP$:

- Als $\models A \wedge B$, dan $\models A$ en $\models B$
- Als $\models A$ of $\models B$, dan $\models A \vee B$

Geef een tegenvoorbeeld voor de volgende bewering:

- Als $\models A \vee B$, dan $\models A$ of $\models B$

TUDelft

## Als $\models A \wedge B$, dan $\models A$ en $\models B$, voor alle $A, B \in PROP$.

**Bewijs.**

Stel dat $\models A \wedge B$. Dan geldt voor alle valuaties dat $v(A \wedge B) = \min(v(A), v(B)) = 1$.
Neem een willekeurige valuatie, $w$. Te bewijzen is dat $w(A) = 1$ en dat $w(B) = 1$.
Ook voor $w$ geldt dat $\min(w(A), w(B) = 1$, dat kan alleen als $w(A) = w(B)) = 1$. Omdat $w$ willekeurig was gekozen, geldt voor alle valuaties dat $v(A) = v(B) = 1$, oftewel dat $\models A$ en $\models B$. QED

TU Delft



## Als $\models A$ of $\models B$, dan $\models A \vee B$, voor alle $A, B \in PROP$.

**Bewijs.**

Stel: $\models A$ of $\models B$. Neem een willekeurige valuatie $w$. We onderscheiden twee gevallen:

- $\models A$ Als $\models A$, dan geldt voor alle valuaties, dus ook voor $w$, dat $v(A) = 1$. Als $w(A) = 1$ is $w(A \vee B) = \max(w(A), w(B)) = \max(1, w(B)) = 1$.
- $\models B$ Als $\models B$, dan geldt voor alle valuaties, dus ook voor $w$, dat $v(B) = 1$. Als $w(B) = 1$ is $w(A \vee B) = \max(w(A), w(B)) = \max(w(A), 1) = 1$.

In beide gevallen geldt dat $w(A \vee B)$, en omdat $w$ willekeurig was gekozen, geldt dit voor alle valuaties, oftewel dat $\models A \vee B$. QED

TU Delft



## Tegenvoorbeeld

**Definitie (Tegenvoorbeeld)**

*Een tegenvoorbeeld tegen de geldigheid van een redeneerschema (meta-bewering) bestaat uit:*

1. *een keuze van een formule voor iedere metavariabele, en*
2. *een redenering dat voor deze keuze de meta-bewering niet waar is. (In dit geval van een implicatie, moet het antecedent waar zijn, maar het consequent onwaar.)*

TU Delft



## Als $\models A \vee B$, dan $\models A$ of $\models B$.

**Tegenvoorbeeld**

Beschouw het volgende tegenvoorbeeld. Zij $A = p$ en $B = \neg p$. Dan geldt inderdaad $\models A \vee B$, want voor alle valuaties is of $v(p) = v(A) = 1$ of $v(\neg p) = v(B) = 1$. Maar noch $p$, noch $\neg p$ is een tautologie (voor beide bestaan er valuaties die ze onwaar maken), dus ($\models A$ of $\models B$) is onwaar.

TU Delft