TI1300: Redeneren en Logica

College 6: De Boommethode voor de Propositielogica

Tomas Klos

Algoritmiek Groep

De Boommethode (*Logica*, hoofdstuk 5)

De Boommethode

De boommethode is een methode waarmee je kunt nagaan of een formule C logisch gevolg is van een verzameling formules Γ.

Stelling 5.1.1 (*Logica*, p. 55)

$\Gamma \models C$ desda $\Gamma \cup \{\neg C\}$ is niet vervulbaar.

Immers, als $\Gamma \cup \{\neg C\}$ wel vervulbaar zou zijn, dan zou er een valuatie zijn die

- zowel de verzameling premissen Γ,
- als de negatie van de conclusie C

waar maakt, en dus de conclusie onwaar.

Voorbeelden

A	B	$A \to B$	,	A	$\therefore$	$\neg$	B
0	0	1		0		1	0
0	1	1		0		0	1
1	0	0		1		1	0
1	1	**1**		**1**		**0**	**1**

A	B	$A \to B$	,	$\neg A$	$\therefore$	$\neg$	$\neg B$
0	0	**1**		**1**		**0**	**1**
0	1	**1**		**1**		**1**	**0**
1	0	0		0		0	1
1	1	0		1		1	0

Voorbeeld: $A \to B, A \therefore B$

Is $A \to B, A, \therefore B$ logisch geldig?
m.a.w., is $\{A \to B, A, \neg B\}$ vervulbaar?

Hoe zat het ook alweer?

$\Gamma \therefore C$ is logisch geldig desda $\Gamma \models C$

$\Gamma \models C$ desda $\Gamma \cup \{\neg C\}$ onvervulbaar is.

- Als $\Gamma \cup \{\neg C\}$ vervulbaar is, dan is $\Gamma \therefore C$ niet logisch geldig
- Als $\Gamma \cup \{\neg C\}$ onvervulbaar, dan is $\Gamma \therefore C$ wel logisch geldig

$\{A \to B, A, \neg B\}$ is vervulbaar als $\{\neg A \vee B, A, \neg B\}$ vervulbaar is
$\{\neg A \vee B, A, \neg B\}$ is vvb als $\{\neg A, A, \neg B\}$ vvb of $\{B, A, \neg B\}$ vvb

Voorbeelden van de boommethode

Voorbeelden

Is het waar dat

- $A \to B, B \to C \models A \to C$? Ja
- $A \vee B, B \vee C \models A \vee C$? Nee, tegenvoorbeeld is valuatie v, $v(A) = v(C) = 0, v(B) = 1$

Handige tip

Stel vertakken zo lang mogelijk uit
(maar niet door regels op subformules toe te passen!)

TU Delft

Vaststellen van de geldigheid van $A_1, \ldots, A_n \therefore C$

1. herschrijf de formules in de verzameling $\{A_1, \ldots, A_n, \neg C\}$ tot simpeler formules, (desnoods) tot het niveau van literalen,
2. de boom vertakt bij elke $\vee$,
3. in elke tak, op zoek naar een A zodat A en $\neg A$ in de tak.

Conclusie:

- 2 mogelijkheden: deze complementaire formules worden
  wel gevonden, dan 'sluit' de tak
  niet gevonden, dan blijft de tak 'open'
- Als alle takken sluiten is
  - $\Gamma \cup \{\neg C\}$ niet vervulbaar, en dus
  - C logisch gevolg van Γ, en
  - de redenering $\Gamma \therefore C$ logisch geldig.
- Als er tenminste één tak open blijft, is
  - $\Gamma \cup \{\neg C\}$ vervulbaar,
  - er een model van Γ dat ook model van $\neg C$ is,
  - en is dus de redenering $\Gamma \therefore C$ logisch ongeldig

TU Delft

Een tegenvoorbeeld vinden in een boom

Tegenvoorbeeld

Een tegenvoorbeeld tegen een redenering $A_1, \ldots, A_n \therefore C$ is een valuatie v die

- $\{A_1, \ldots, A_n, \neg C\}$ vervult
- dus model is voor $\{A_1, \ldots, A_n\}$ maar niet voor C

Te vinden in een boom met ≥ 1 openblijvende takken:

- check een openblijvende tak
- alle literalen x_i in de tak moeten $v(x_i) = 1$ hebben (als $v(\neg x) = 1$, is $v(x) = 0$)
- andere variabelen mogen een willekeurige waarde hebben
- Je moet dan wel alle formules hebben afbroken tot literalen!!!

TU Delft

Werkwijze Boommethode

Logica, tabel 5.1, p. 60

- Begin met de formules in $\Gamma \cup \neg C$ onder elkaar
- Pas de regels toe (*Logica*, tabel 5.1, p. 60):

$\neg\neg A \ldots A$	[$\neg$-regel]
$A \wedge B \ldots A, B$	[$\wedge$-regel]
$\neg(A \wedge B) \ldots \neg A \vee \neg B$	[$\wedge$-regel]
$A \vee B \ldots A \quad B$ (vertakking)	[$\vee$-regel]
$\neg(A \vee B) \ldots \neg A \wedge \neg B$	[$\vee$-regel]
$A \to B \ldots \neg A \vee B$	[$\to$ -regel]
$\neg(A \to B) \ldots A \wedge \neg B$	[$\to$ -regel]
$A \leftrightarrow B \ldots (A \to B) \wedge (B \to A)$	[$\leftrightarrow$ -regel]
$\neg(A \leftrightarrow B) \ldots \neg(A \to B) \vee \neg(B \to A)$	[$\leftrightarrow$ -regel]

- Nummer en verantwoord elke stap
- Pas geen regels op echte subformules toe

TU Delft

Boommethode: Oefenen

Oefening

Is het waar dat

- $\neg B, \neg B \to \neg(T \wedge \neg N), \neg N \models \neg T$?
- $A \to B, A \vee \neg B \models \neg A$?

Meer Oefenen

Analyseer mbv de boommethode of de volgende meta-beweringen waar zijn.

1. $A, A \to B \models B$
2. $\models \neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$
3. $A, (A \wedge \neg B) \to C, \neg(A \wedge C) \models B$
4. $A \to B, \neg C \to B \models A \to C$
5. $\neg A \leftrightarrow (B \wedge C), A \wedge C \models \neg B$
6. $A \leftrightarrow (\neg B \vee \neg C), \neg(A \to \neg C) \models \neg B$
7. $(A \wedge B) \to D, \neg(D \to E), B \vee E \models \neg A$
8. $A \to ((B \to C) \to D), \neg(A \to D) \models \neg(B \to C)$
9. $(A \wedge B) \to C, \neg A \vee (A \to B) \models A \to C$

Oefening: maak 2, 3, 5, 8