TI1300: Redeneren en Logica

College 8: Propositielogica, de Ontknoping

Tomas Klos

Algoritmiek Groep

Voorbeeld van Natuurlijke deductie

Volgorde: B1, B2, A4, C4, D4, B4, B3, D1, A3, D2, C2, A2, A1, C1, C3, D3

	1	2	3	4
A	12+ 3	1	2	4
B	4 4	2	18+ 3	1- 1
C	1- 1	3	4	2
D	2	4	1	3

- B1=4
- B2=2, want 12-10 (op de bovenste rij)
- A4=4, want A1 $\neq$ 4, A2$\neq$ 4, A3 $\neq$ 4
- [B4]=$\{1,2\}$ of $\{2,3\}$ (niet $\{3,4\}$ vanwege A4=4),
  - als $\{1,2\}$ dan C4=2 vanwege B2=2
  - als $\{2,3\}$ dan C4=2 vanwege B2=2

  dus C4=2.

Wat leert ons de k-doku?

- we redeneren volgens een beperkte verzameling regels;
- premissen dwingen conclusies af;
- je leidt nieuwe kennis af die je kunt gebruiken;
- dit is een gestructureerd, stapsgewijs proces;
- als het waar is, is het af te leiden (zelfs als dat lastig is)

- deductie is als puzzelen

Het nut van bewijzen

Methoden om vast te stellen of C logisch gevolg van Γ is

- waarheidstafel
- is $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow C$ (in CNV) een tautologie?
- boommethode
- resolutie

OK, stel dat C logisch volgt uit Γ... **Hoe?**

Een bewijs communiceert tegelijkertijd:

- **dat** een redenering geldig is, en
- **waarom** een redenering geldig is.

Natuurlijke Deductie

Domein van de formele logica

Redeneringen die geldig zijn op basis van vorm.

Vandaag hebben we het over

(Natuurlijke) deductie

het afleiden van een conclusie uit premissen:

- hoe volgt een conclusie uit bepaalde premissen?
- waarom is de conclusie waar als de premissen dat zijn?

Wij behandelen het systeem $\mathcal{F}$ van Frederic B. Fitch (1908-1987)

- een syntactisch systeem
- bestaand uit een verzameling afleidingsregels

TU Delft

Voorbeeld

Stelling

Stel dat $p \to q$, en dat $\neg q$ (2 aannames).
Dan geldt $\neg p$ (conclusie).

Bewijs.

Te bewijzen: $\neg p$.
Stel (ter contradictie), dat p (aanname 3).
Dan geldt, volgens de eerste premisse, q.
Maar de tweede premisse zegt dat $\neg q$.
Dat is een tegenspraak, dus de aanname (p) kan niet waar zijn:
er geldt $\neg p$. QED

TU Delft

Het voorbeeld in $\mathcal{F}$

1	$p \to q$	hypothese 1 (premisse 1)
2	$\neg q$	hypothese 2 (premisse 2)
3	p	hypothese 3 (ter contradictie)
4	$p \to q$	rei, 1
5	q	$\to$-elim, 4, 3
6	$\neg q$	rei, 2
7	$\neg p$	$\neg$-introductie, 3, 5, 6

TU Delft

Opmerkingen over de notatie van $\mathcal{F}$

- elke formule krijgt een nummer en een verantwoording.
- boven een horizontale streep staat een aanname (hypothese).
- rechts van de verticale streep (hypothese-interval) is de aanname geldig.
- 1 formule $\in$ *PROP* per lijn:
  - aanname (verantwoording: "hypothese" met volgnummer)
  - afgeleide formule (verantwoording: afleidingsregel, met de nummers van de formules die premissen van de regel zijn)
- hypothese-intervallen bevatten ≥ 2 formules, en kunnen genest worden, of disjunct zijn, maar niet overlappen!
- je alle formules gebruiken die 'hoger' in 'open' hypothese-intervallen (verticale lijn links) voorkomen.
- de laatste formule (conclusie) moet zoveel verticale streepen links hebben als er premissen in de redenering zijn

TU Delft

Het systeem $\mathcal{F}$

Het systeem $\mathcal{F}$ bestaat uit een aantal regels

- Er zijn 2 regels voor elk connectief: voor
  - elimineren het gebruiken van een formule met het connectief
  - introduceren het afleiden van een formule met het connectief
- Elke regel heeft
  - premissen de formules nodig voor toepassing van de regel
  - conclusie de formule die het resultaat van de regel is
- Er is nog een speciale regel: reïteratie

Afleidingsregels (*Logica*, tabel 6.1, p. 71)

Afleidbaarheid:

$A_1, \ldots, A_n \vdash C$ (C is afleidbaar uit $A_1, \ldots, A_n$)
desda er een afleiding van C uit $A_1, \ldots, A_n$ bestaat

$\vdash C$ (C is afleidbaar)
desda er een afleiding van C bestaat zonder hypothesen

2 typen afleidingsregels:

- introductie van $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$: hoe kan een formule met elk connectief worden geconcludeerd?
- eliminatie van $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$: hoe kan een formule met elk connectief worden gebruikt?

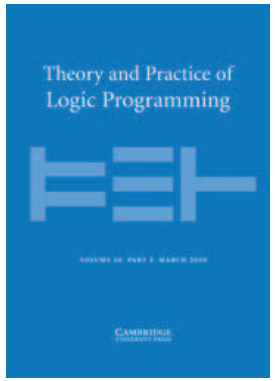
speciale regel: reïteratie ("rei")

Goed om te weten

Logica, hoofdstuk 7

De propositielogica is correct en volledig:

$$\Gamma \models F \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vdash F.$$



Afleidingsregels

2 typen afleidingsregels:

- introductie van $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$: hoe kan een formule met elk connectief worden geconcludeerd?
- eliminatie van $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$: hoe kan een formule met elk connectief worden gebruikt?

speciale regel: reïteratie ("rei")

Elke afleidingsregel bestaat uit:

- premissen voorwaarden waaraan je moet voldoen
- conclusie (**vet** gedrukt): conclusie die je dan mag trekken

$\wedge$-intro

	$\cdots$	
	$\vdots$	
i	A	
	$\vdots$	
j	B	
	$\vdots$	
n	$\mathbf{A \wedge B}$	$\wedge$-intro, i, j

$\wedge$-elim

	$\cdots$	
	$\vdots$	
i	$A \wedge B$	
	$\vdots$	
n	$\mathbf{A}$	$\wedge$-elim, i

	$\cdots$	
	$\vdots$	
i	$A \wedge B$	
	$\vdots$	
n	$\mathbf{B}$	$\wedge$-elim, i

Voorbeeld: $p \wedge q \vdash q \wedge p$
Opgave: $p \wedge (q \wedge r) \vdash r \wedge p$

$\rightarrow$-intro (Bewijzen van een implicatie)

	$\cdots$	
	$\vdots$	
i	$\quad A$	
	$\quad \vdots$	
j	$\quad B$	
	$\vdots$	
n	$\mathbf{A \rightarrow B}$	$\rightarrow$-intro, i, j

$\rightarrow$-elim

	$\cdots$	
	$\vdots$	
i	$A \rightarrow B$	
	$\vdots$	
j	A	
	$\vdots$	
n	$\mathbf{B}$	$\rightarrow$-elim, i, j

Voorbeeld: $\vdash (p \wedge q) \rightarrow p$
Opgave: $((p \wedge q) \rightarrow r) \vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r))$