TI1300: Redeneren en Logica

College 10: Verzamelingenleer

Tomas Klos

Algoritmiek Groep

Overzicht

Colleges 1–2: Bewijstechnieken

Colleges 3–9: Propositielogica

Vandaag en morgen: Verzamelingenleer

Colleges 12–15/16: Predicatenlogica

Verzamelingenleer (*B&B*, hoofdstuk 5)

Verzamelingenleer:

- eind 19de eeuw ontwikkeld (Georg Cantor, 1845–1918)
- fundament van de wiskunde (functie, natuurlijke getallen)
- basis voor axiomatisering wiskundige deelgebieden
- intuïtieve of naïve verzamelingenleer

Definitie (Verzameling)

- *veelheid beschouwd als één*
- *collectie objecten (elementen) verzameld in één*

Een verzameling is volledig bepaald door zijn elementen.

Voorbeelden

- $V = \{1, 2, 3\}$
- $K = \{a, o, i, u, e\}$
- $\mathbb{B} = \{0, 1\}$
- $E = \{0, 2, 4, \ldots\}$
- $W = \{\text{maandag, dinsdag, } \ldots, \text{ zondag}\}$
- H is de verzameling van alle hoofdsteden van provincies

Speciale verzamelingen:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ is de verzameling natuurlijke getallen
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ is de verzameling gehele getallen
- $\mathbb{Q}$ is de verzameling rationale getallen
- $\mathbb{R}$ is de verzameling reële getallen
- $\mathbb{C}$ is de verzameling complexe getallen

Notatie van verzamelingen

- verzamelingen duiden we aan met hoofdletters (V, K, W, etc.)
- elementen worden gescheiden door komma's $\{0, 1\}$ ...
- ... en omgeven door accolades: $\{$ en $\}$
- de volgorde van opschrijven doet er niet toe: $\{0, 1\} = \{1, 0\}$
- een object kan maar één keer in een verzameling zitten ...
- ... maar je mag ze vaker opschrijven: $\{0, 1\} = \{0, 0, 1\}$

TU Delft

Lidmaatschap

Object a is element of lid van verzameling B: $a \in B$

- dus $0 \in \mathbb{N}$
- $1/2 \in \mathbb{Q}$
- maandag, dinsdag $\in W$

c is geen element van A: $c \notin A$ of $\neg(c \in A)$

- dus $-1 \notin \mathbb{N}$
- $\neg(\sqrt{2} \in \mathbb{Q})$, etc.

de cardinaliteit van een verzameling is het aantal elementen: $|A|$

- dus $|W| = 7$
- $|K| = 5$
- $|\mathbb{B}| = 2$

TU Delft

Verzamelingen specificeren

2 manieren om verzamelingen te specificeren:

opsommen: $\mathbb{B} = \{0, 1\}, V = \{2, 3, 5, 7\}, \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

beschrijven: $V = \{x \mid x \text{ is een priemgetal} \wedge x \leq 10\}$
"V is de verzameling van alle x zodanig dat
x een priemgetal kleiner dan of gelijk aan 10 is"

Verzamelingen als elementen:

- $\{0, \{0, 1\}, \{\{2\}\}\}$
- $\{\mathbb{N}\}$

Vraag: Wat is $|\{\mathbb{N}\}|$?

TU Delft

Opgave

Opgave: Geef een bewijs of tegenvoorbeeld voor de volgende bewering.

Bewering

Voor alle x, y, z geldt: als $x \in y$ en $y \in z$, dan $x \in z$.

Tegenvoorbeeld

$x = x, y = \{x\}, z = \{\{x\}\}$.
Nu geldt wel $x \in y$ en $y \in z$, maar $x \notin z$ (wel $\{x\} \in z$ overigens).

TU Delft

Gelijkheid van Verzamelingen

Definitie (Gelijkheid van verzamelingen)

Twee verzamelingen A en B zijn gelijk, $A = B$, wanneer ze dezelfde elementen hebben.

$A = B$ als voor alle x: $x \in A$ desda $x \in B$

$$(x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A)$$

Ongelijkheid

Dus 2 verzamelingen A en B zijn ongelijk, $A \neq B$ als . . .

$$\begin{aligned} & \neg((x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A)) \\ \Leftrightarrow & \neg(x \in A \to x \in B) \vee \neg(x \in B \to x \in A) \\ \Leftrightarrow & (x \in A \wedge \neg(x \in B)) \vee (x \in B \wedge \neg(x \in A)) \end{aligned}$$

Een tegenvoorbeeld voor gelijkheid is dus . . .

- een $e \in A$ waarvoor geldt $e \notin B$ of
- een $e \in B$ waarvoor geldt $e \notin A$.

Voorbeelden

Voorbeelden:

$$\begin{aligned} \{3,4,5\} &= \{5,3,4\} & \{2,4\} &\neq \{2,4,5\} \\ \{3,3,4\} &= \{3,4\} & \{2,4\} &\neq \{5,6\} \\ \{\{0,1\},1\} &= \{1,\{1,0\}\} & \{0,1\} &\neq \{\{0,1\}\} \end{aligned}$$

De lege verzameling $\emptyset$

Definitie (Lege verzameling)

De verzameling zonder elementen heet de lege verzameling, $\emptyset$.

Stelling

Er is maar één lege verzameling.

Bewijs (uit het ongerijmde).

Stel: er zijn 2 verschillende lege verzamelingen, V en W.
V en W zijn ongelijk, dus er moet een element, zeg e, in V zitten, dat niet in W zit. Dus $e \in V$ en $e \notin W$.
Maar V is leeg, dus $e \notin V$.
Een tegenspraak, dus onze aanname kan niet waar zijn;
er is maar één lege verzameling. QED

Het Universum

Comprehensieprincipe: eigenschappen definiëren verzamelingen

- Voor elke eigenschap P bestaat de verzameling van alle dingen met eigenschap P (naïef)
- Consequentie: de verzameling $R = \{X \mid X \notin X\}$ kan niet bestaan (Russell paradox).
- Oplossing: veronderstel een vooraf bepaald universum U: voor elke eigenschap P en verzameling U bestaat de verzameling van alle elementen van U met eigenschap P.

Deelverzamelingen, inclusie

Definitie (Deelverzameling)

Verzameling A is een deelverzameling van verzameling B, $A \subseteq B$, als alle elementen van A ook element van B zijn.

$$A \subseteq B \text{ desda voor alle } x \text{ geldt: als } x \in A \text{ dan } x \in B$$
$$x \in A \to x \in B$$
$$\neg(x \in A \land \neg(x \in B))$$

Voorbeelden:

- $\{2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\}$? voor alle objecten geldt, als ze in de eerste zitten (2 en 3), zitten ze ook in de tweede
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$? $\emptyset$ zit wel in de eerste maar niet in de tweede, vormt dus een tegenvoorbeeld voor de bewering dat $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$.

Belangrijke inclusierelaties

Stelling

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

Stelling

$$P \subseteq NP.$$

Vermoeden

$$NP \not\subseteq P, \text{ dus } P \neq NP.$$

Strikte deelverzameling

Definitie (Strikte deelverzameling)

Verzameling A is een strikte deelverzameling van B, $A \subset B$, als $A \subseteq B$, en $A \neq B$ (dus $B \not\subseteq A$).

Voorbeeld: als $A = \{0,1\}$ en $B = \{0,1,2\}$, dan geldt $A \subset B$.

Belangrijke eigenschappen van inclusie

Zij A, B en C verzamelingen. Dan geldt?

- $A \subseteq A$, bewijs: voor alle x geldt: als $x \in A$, dan $x \in A$.
- als $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$, dan $A = B$
- als $A \subseteq B$ en $B \subseteq C$, dan $A \subseteq C$

Verwar $\in$ en $\subseteq$ niet met elkaar:

$$\{2\} \in \{\{2\}, 3\} \text{ maar } \{2\} \nsubseteq \{\{2\}, 3\}$$
$$\{2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\} \text{ maar } \{2, 3\} \notin \{1, 2, 3\}$$

TU Delft

Opgave

Geef een bewijs of tegenvoorbeeld:

Bewering

Stel dat A een verzameling is. Dan geldt: $\emptyset \subseteq A$.

Bewijs (uit het ongerijmde).

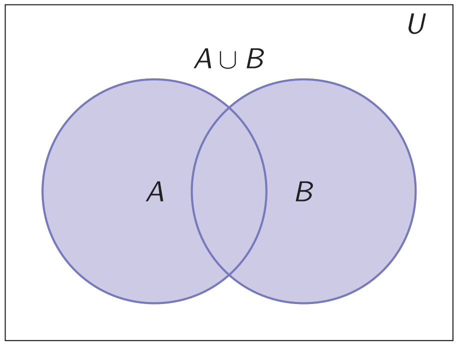
Stel dat $\emptyset \nsubseteq A$. Dan moet er dus een element in $\emptyset$ zitten, dat niet in A zit. Maar er zitten geen elementen in $\emptyset$. Een tegenspraak, dus de aanname dat $\emptyset \nsubseteq A$ kan niet waar zijn, dus $\emptyset \subseteq A$. QED

TU Delft

Vereniging

Definitie (Vereniging van verzamelingen)

De vereniging van verzamelingen A en B, $A \cup B$, is de verzameling $\{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$.



TU Delft

Opgave

Geef een bewijs of tegenvoorbeeld:

Bewering

Voor alle verzamelingen A en B geldt $A \subseteq A \cup B$.

Bewijs.

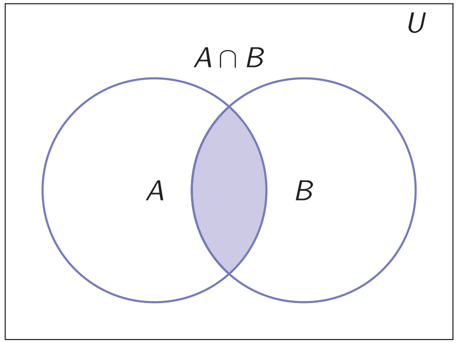
Neem een willekeurige $e \in A$. Dan geldt $e \in A \vee e \in B$, dus $e \in A \cup B$. Omdat e willekeurig was, geldt voor alle $x \in A$ dat $x \in A \cup B$, dus dat $A \subseteq A \cup B$. QED

TU Delft

Doorsnede

Definitie (Doorsnede van verzamelingen)

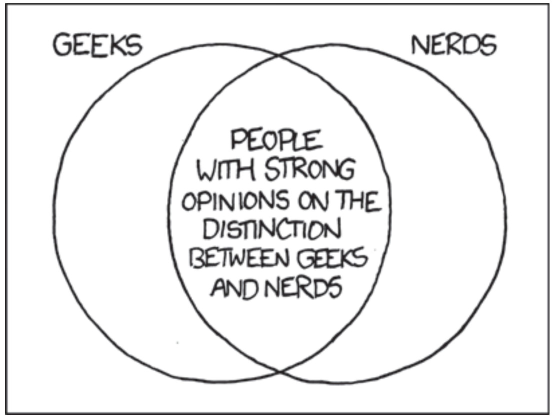
De doorsnede van verzamelingen A en B, $A \cap B$, is de verzameling $\{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$.



TU Delft

xkcd.com

http://xkcd.com/747/

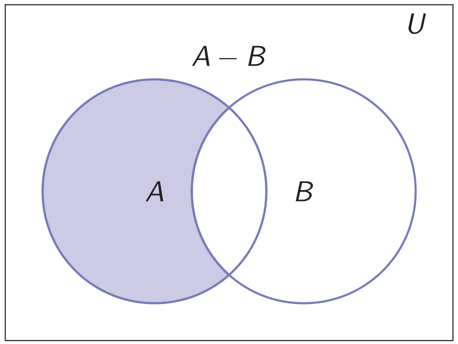


TU Delft

Verschil

Definitie (Verschil van verzamelingen)

Het verschil van verzamelingen A en B, $A - B$, is de verzameling $\{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

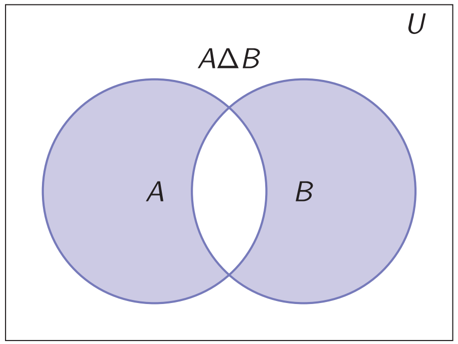


TU Delft

Symmetrisch verschil

Definitie (Symmetrisch verschil van verzamelingen)

Het symmetrisch verschil van verzamelingen A en B, $A \Delta B$ ($A \oplus B$) is de verzameling $\{x \in U \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$.



TU Delft

Complement

Definitie (Complement van een verzameling)

Het complement van een verzameling A, A^c, is de verzameling $\{x \in U \mid x \notin A\}$.

Voorbeelden:

- Als $U =$ het alfabet, dan is $K^c =$ de medeklinkers.
- Als $U =$ alle studenten, $M =$ alle mannelijke studenten en $V =$ alle vrouwelijke studenten, dan is $V^c = M$, en $M^c = V$.

TU Delft

Operaties: oefening

Definitie (Operaties op verzamelingen)

Zij A en B verzamelingen in een universum U en $x \in U$. Dan geldt:

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\text{ desda } x \in A \wedge x \in B \\ x \in A \cup B &\text{ desda } x \in A \vee x \in B \\ x \in A - B &\text{ desda } x \in A \wedge x \notin B \\ x \in A \Delta B &\text{ desda } (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \\ x \in A^c &\text{ desda } x \notin A \end{aligned}$$

Oefenen: Zij $A = \{1, 3, 5, 8, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ en $C = \{1, 5\}$.

1. Voor alle paren uit A, B en C, welke inclusierelaties gelden? (bijv. $A \subseteq B$? $B \subseteq C$? $B \subseteq A$?)
2. Wat is $A \cup A$, $A \cup B$, $A - B$, $A \cap B$, $C - A$, $A \Delta B$?

TU Delft

Oefenen

Zij $A = \{1, 3, 5, 8, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ en $C = \{1, 5\}$

1. Welke inclusierelaties gelden?
   - Er geldt $C \subseteq A$ en $C \subseteq B$.
   - Maar ook $A \subseteq A$, $B \subseteq B$, $C \subseteq C$.
2.
   - $A \cup A = A$
   - $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$
   - $A - B = \{8, 9\}$
   - $A \cap B = \{1, 3, 5\}$
   - $C - A = \emptyset$
   - $A \Delta B = \{2, 7, 8, 9\}$

TU Delft

Stellingen over inclusie van verzamelingen

Definitie (Deelverzameling)

Verzameling A is een deelverzameling van verzameling B, $A \subseteq B$, als alle elementen van A ook element van B zijn.

$A \subseteq B$ desda voor alle x geldt: als $x \in A$ dan $x \in B$.

Bewering

Zij A, B en C verzamelingen in universum U.

- *als $A \subseteq C$ en $B \subseteq C$, dan $A \cup B \subseteq C$*
- *als $A \subseteq B$ en $A \subseteq C$, dan $A \subseteq (B \cap C)$*
- *zie verder B&B, stelling 5.2, p. 64*

Bewijsprincipe (van een inclusie $A \subseteq B$).

Neem een willekeurige $x \in A$ en bewijs dat $x \in B$.

lft

Bewering

Geef een bewijs of tegenvoorbeeld

Bewering

Stel dat $A \subseteq C$ en $B \subseteq C$. Dan geldt $A \cup B \subseteq C$.

Bewijs.

Te bewijzen is dat $A \cup B \subseteq C$.
(dit is waar, wanneer geldt: als $x \in A \cup B$, dan $x \in C$.)
Neem een willekeurige $e \in A \cup B$, te bewijzen: $e \in C$.
$e \in A \cup B$, dus $e \in A \vee e \in B$.

- als $e \in A$, dan $e \in C$, omdat $A \subseteq C$,
- als $e \in B$, dan $e \in C$, omdat $B \subseteq C$,

dus $e \in C$. Omdat e willekeurig was gekozen, geldt voor alle $x \in A \cup B$ dat $x \in C$, oftewel dat $A \cup B \subseteq C$. QED

Stellingen over gelijkheid van verzamelingen

Zij A, B en C verzamelingen in het universum U.

- $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$ (Symm. verschil)
- zie verder *B&B*, stelling 5.1, p. 63

Bewijsprincipe (van gelijkheid van verzamelingen)

Stel x is element van de verzameling links; leid in een aantal equivalenties af dat x een element is van de verzameling rechts.
Of:
Bewijs de inclusie-relatie in beide richtingen.

Bewijs

Stelling

$A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

Bewijs.

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B - C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B - C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) - C \end{aligned}$$

QED