TI1300: Redeneren en Logica

College 12: Predicatenlogica

Tomas Klos

Algoritmiek Groep

TUDelft

Nieuwe redeneringen

$$\begin{array}{rl} & \text{Alle mensen zijn sterfelijk} \\ & \text{Socrates is een mens} \\ \hline \therefore & \text{Socrates is sterfelijk} \end{array}$$

Niet propositie-logisch geldig, want

$$\begin{array}{rc} & p \\ & q \\ \hline \therefore & r \end{array} \qquad \begin{array}{l} p = \text{“Alle mensen zijn sterfelijk”} \\ q = \text{“Socrates is een mens”} \\ r = \text{“Socrates is sterfelijk”} \end{array}$$

is geen propositie-logisch geldige redenering $(p, q \not\models r)$

TUDelft

Een nieuwe taal

Wens

Een andere taal nodig, waarmee we de interne structuur van beweringen kunnen uitdrukken.

We zien allerlei typen uitdrukkingen, onder andere:

- Socrates is mens
  Daniël is student
  Piet is lang
- alle mensen zijn sterfelijk
  alle studenten zijn slim
  alle paarden zijn bruin
- alle studenten hebben een practicumpartner
  alle redeneringen hebben een conclusie
  alle paarden hebben een staart
  alle mensen hebben een staart

TUDelft

Waar gaan deze uitdrukkingen over?

1. Daniël is een student
   - Daniël
   - de eigenschap student te zijn
2. Alle paarden zijn bruin
   - alle
   - de eigenschap paard te zijn
   - de eigenschap bruin te zijn
3. Alle studenten hebben een practicumpartner
   - alle
   - de eigenschap student te zijn
   - een
   - de eigenschap de practicumpartner van iemand te zijn
4. Alle studenten zijn jonger dan een docent
   - alle
   - een
   - de eigenschap student te zijn
   - de eigenschap docent te zijn
   - de eigenschap jonger dan iemand te zijn

TUDelft

Eigenschappen

Om eigenschappen uit te drukken gebruiken we predicaatsymbolen:

$S(d)$: daniël is een student

$P(a)$: amerigo is een paard

$B(a)$: amerigo is wit

$J(j,p)$: jan is jonger dan piet

$P(o,i)$: olivier is de practicumpartner van iris

Onderdelen van het alfabet

predicaatsymbolen: $P_0, P_1, \ldots$: n-plaatsig ($n > 0$)
we schrijven vaak P, Q, R, etc. (hoofdletters)

namen: $c_0, c_1, c_2, \ldots$
we schrijven vaak a, b, c (of de eerste letter van iemands naam) (kleine letters)

Verder met vertalen

1. Daniël is een student: $S(d)$
2. Alle paarden zijn bruin
   - alle
   - de eigenschap paard te zijn: $P(\cdot)$
   - de eigenschap bruin te zijn: $B(\cdot)$
3. Alle studenten hebben een practicumpartner
   - alle
   - de eigenschap student te zijn: $S(\cdot)$
   - een
   - de eigenschap practicumpartner van iemand te zijn: $P(\cdot,\cdot)$
4. Alle studenten zijn jonger dan een docent
   - alle
   - een
   - de eigenschap student te zijn: $S(\cdot)$
   - de eigenschap docent te zijn: $D(\cdot)$
   - de eigenschap jonger dan iemand te zijn: $J(\cdot,\cdot)$

Variabelen

Waar gaan onze uitspraken over?
Misschien de TI1300 studenten ...

Ik wil het niet hebben over elke individuele student
S(daniël), S(bryan), S(huub), etc.

Ik gebruik een variabele: $x_0, x_1, \ldots$ (we schrijven $x, y, z, \ldots$)

$S(x)$: x is een student

of $S(y)$: y is een student, uiteraard

$P(x)$: x is een paard

$J(x,y)$: x is jonger dan y

of $J(x,y)$: y is jonger dan x (maar dat is verwarrend)

$P(x,y)$: x is de practicumpartner van y

Wat betekent 'alle'?

"Alle studenten zijn slim" is waar als

voor alle objecten in het domein geldt:
als het object een student is, dan is het object slim

daniël: student? ja. slim? ja ✓

huub: student? ja. slim? ja ✓

jokertje: student? nee. ✓(slim? maakt niet uit)

⋮

"Alle studenten zijn slim" is alleen onwaar als:

peiter: student? ja. slim? nee ↯

Wat betekent '(er is) een'?

"Er is een slimme student" is waar als

er in het domein (tenminste) één object bestaat zodat: het object een student is en slim is.

piet is een student en is slim
of marieke is een student en is slim
of stefan is een student en is slim
⋮

TU Delft

Kwantoren: ∀ en ∃ elk 10 keer opschrijven!

Kwantoren: ∀ en ∃

$\forall x(\ldots)$: voor alle x geldt $(\ldots)$

$\exists x(\ldots)$: er bestaat een x waarvoor geldt $(\ldots)$

"Alle studenten zijn slim"

Voor alle objecten in het domein geldt: als het object een student is (St), dan is het object slim (Sl)

$$\forall x(St(x) \to Sl(x)).$$

"Er is een slimme student"

Er bestaat in het domein (tenminste) één object zodat: het object een student is en slim is.

$$\exists x(St(x) \wedge Sl(x)).$$

lft

Verder met vertalen: nu jullie

1. Daniël is een student: $S(d)$
2. Alle paarden zijn bruin: $\forall x(P(x) \to B(x))$
3. Alle studenten hebben een practicumpartner
   $\forall x(S(x) \to \exists y P(x, y))$
   - alle
   - de eigenschap student te zijn: $S(\cdot)$
   - een
   - de eigenschap practicumpartner van iemand te zijn: $P(\cdot, \cdot)$
4. Alle studenten zijn jonger dan een docent
   $\forall x(S(x) \to \exists y(D(y) \wedge J(x, y)))$
   - alle
   - een
   - de eigenschap student te zijn: $S(\cdot)$
   - de eigenschap docent te zijn: $D(\cdot)$
   - de eigenschap jonger dan iemand te zijn: $J(\cdot, \cdot)$

TU Delft

Meer oefenen

Vertaal: Niet alle paarden zijn bruin
Geef ook je vertaalsleutel (welke predicaten, en namen)
Vertaalsleutel:

predicaten: $P(x)$: x is een paard
$B(x)$: x is bruin

$$\neg\forall x(P(x) \to B(x)) \quad \text{of} \quad \exists x \neg(P(x) \to B(x)) \quad \text{of} \quad \exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$$

TU Delft

Vertalen

Vertaal en geef je vertaalsleutel:

1. Alle jongens houden van een meisje
2. Alle jongens houden van één meisje
3. Niet alle mensen hebben staarten
4. Elk kind is jonger dan zijn/haar moeder (geen verschil)
5. Jan en Piet hebben dezelfde oma aan moeders-kant

namen: $j =$ Jan, $p =$ Piet

predicaten: $J(x)$: x is een jongen, $M(x)$: x is een meisje
$H(x)$: x is menselijk (human)
$L(x, y)$: x houdt van y (loves)
$S(x)$: x draagt een staart
$M(x, y)$: x is de moeder van y
$J(x, y)$: x is jonger dan y
$K(x)$: x is een kind

TU Delft

Meerdere wegen leiden naar Rome

Niet alle mensen hebben staarten: $\neg\forall x(M(x) \to S(x))$.

predicaten: $S(x)$: x draagt een staart
of: $S(x)$: x is een staart
$D(x, y)$: x draagt y

$$\neg\forall x(M(x) \to \exists y(S(y) \wedge D(x, y)))$$

Wil je redeneren

- over staarten dragen, of
- over staarten en over (staarten en andere) dingen dragen?

TU Delft

De gegeven formules zijn niet equivalent

Elk kind is jonger dan zijn/haar moeder

Wanneer zijn de formules niet waar?

- $\neg\forall x(K(x) \to \exists y(M(y, x) \wedge J(x, y)))$

  $K(a) \wedge \forall y(\neg M(y, a) \vee \neg J(a, y))$

- $\neg\forall x\forall y((K(x) \wedge M(y, x)) \to J(x, y))$

  $(K(a) \wedge M(b, a)) \wedge \neg J(a, b)$

TU Delft

Ander voorbeeld

- Elk kind is jonger dan zijn/haar moeder
  $\forall x(K(x) \to \exists y(M(y, x) \wedge J(x, y)))$
  $\forall x\forall y((K(x) \wedge M(y, x)) \to J(x, y))$
- Elk kind is jonger dan zijn oom(s):
  $\forall x\forall y((K(x) \wedge O(y, x)) \to J(x, y))$
  Je kunt meerdere ooms hebben, maar slechts één moeder

Zo'n gegeven stop je in een formule m.b.v. een functie

TU Delft

moeder: predicaat $M(x,y)$ of functie $m(x)$?

$M(x,y)$ veronachtzaamt het feit dat er voor elke y één x bestaat!

De relatie $M \subseteq Mensen^2$
$M = \{(\text{zwaantje, bas}), (\text{trijntje, daan}), (\text{berendina, tomas}), \ldots\}$

Met een functie schrijf je:

- $m(\text{bas}) = \text{zwaantje}$
- $m(\text{daan}) = \text{trijntje}$
- $m(\text{tomas}) = \text{berendina}$

TU Delft

Vertalen met functies

predicaat: $K(x)$, $M(x,y)$, $J(x,y)$
speciaal predicaat: '$=$'
(tussen argumenten geschreven)

functies: $m(x)$: de moeder van x

namen: j (Jan) en p Piet

- Elke kind is jonger dan zijn/haar moeder
  $\forall x \forall y((K(x) \wedge M(y,x)) \rightarrow J(x,y))$ of
  $\forall x(K(x) \rightarrow J(x, m(x)))$
- Jan en Piet hebben dezelfde oma aan moeders-kant
  $\forall x, y, u, v((M(x,y) \wedge M(y,j) \wedge M(u,v) \wedge M(v,p)) \rightarrow x = u)$
  of
  $m(m(j)) = m(m(p))$

TU Delft

Vertalen

Vertalen van kennis in predicaatlogische formules maakt dat je over die kennis (automatisch) kunt redeneren.

Vertaal deze zinnen:

	Alle mensen zijn sterfelijk	$\forall x(M(x) \rightarrow S(x))$
	Socrates is een mens	$M(s)$
$\therefore$	Socrates is sterfelijk	$\therefore\ S(s)$

TU Delft

Redeneren

Waar of onwaar?

Bewering

$$\forall x(M(x) \rightarrow S(x)), M(s) \models S(s)?$$

Voor de predicatenlogica behandelen we

college 14: Boommethode
college 15: Resolutie
geen Fitch ☹
college 13: Syntax en Semantiek

TU Delft