TI1300: Redeneren en Logica

College 13: Syntax en Semantiek van de Predicatenlogica

Tomas Klos

Algoritmiek Groep

TU Delft

Meer oefenen

Vertaal: Niet alle paarden zijn bruin
Geef ook je vertaalsleutel (welke predicaten, en namen)
Vertaalsleutel:

predicaten: $P(x)$: x is een paard
$B(x)$: x is bruin

$$\neg\forall x(P(x) \to B(x)) \quad \text{of} \quad \exists x \neg(P(x) \to B(x))$$
$$\text{of} \quad \exists x(P(x) \land \neg B(x))$$

TU Delft

Vertalen

Vertaal en geef je vertaalsleutel:

1. Alle jongens houden van een meisje
2. Alle jongens houden van één meisje
3. Niet alle mensen hebben staarten
4. Elk kind is jonger dan zijn/haar moeder (geen verschil)
5. Jan en Piet hebben dezelfde oma aan moeders-kant

namen: j = Jan, p = Piet

predicaten: $J(x)$: x is een jongen, $M(x)$: x is een meisje
$H(x)$: x is menselijk (human)
$L(x, y)$: x houdt van y (loves)
$S(x)$: x draagt een staart
$M(x, y)$: x is de moeder van y
$J(x, y)$: x is jonger dan y
$K(x)$: x is een kind

TU Delft

Meerdere wegen leiden naar Rome

Niet alle mensen hebben staarten: $\neg\forall x(M(x) \to S(x))$.

predicaten: $S(x)$: x draagt een staart
of: $S(x)$: x is een staart
$D(x, y)$: x draagt y

$$\neg\forall x(M(x) \to \exists y(S(y) \land D(x, y)))$$

Wil je redeneren

- over staarten dragen, of
- over staarten en over (staarten en andere) dingen dragen?

TU Delft

De gegeven formules zijn niet equivalent
Elk kind is jonger dan zijn/haar moeder

Wanneer zijn de formules niet waar?

- $\neg\forall x(K(x) \to \exists y(M(y,x) \land J(x,y)))$

  $K(a) \land \forall y(\neg M(y,a) \lor \neg J(a,y))$

- $\neg\forall x\forall y((K(x) \land M(y,x)) \to J(x,y))$

  $(K(a) \land M(b,a)) \land \neg J(a,b)$

Ander voorbeeld

- Elk kind is jonger dan zijn/haar moeder
  $\forall x(K(x) \to \exists y(M(y,x) \land J(x,y)))$
  $\forall x\forall y((K(x) \land M(y,x)) \to J(x,y))$
- Elk kind is jonger dan zijn oom(s):
  $\forall x\forall y((K(x) \land O(y,x)) \to J(x,y))$
  Je kunt meerdere ooms hebben, maar slechts één moeder

Zo'n gegeven stop je in een formule m.b.v. een functie

moeder: predicaat $M(x,y)$ of functie $m(x)$?

$M(x,y)$ veronachtzaamt het feit dat er voor elke y één x bestaat!

De relatie $M \subseteq Mensen^2$
$M = \{(\text{zwaantje, bas}), (\text{trijntje, daan}), (\text{berendina, tomas}), \ldots\}$

Met een functie schrijf je:

- $m(\text{bas}) = \text{zwaantje}$
- $m(\text{daan}) = \text{trijntje}$
- $m(\text{tomas}) = \text{berendina}$

Vertalen met functies

predicaat: $K(x)$, $M(x,y)$, $J(x,y)$
speciaal predicaat: '$=$'
(tussen argumenten geschreven)

functies: $m(x)$: de moeder van x

namen: j (Jan) en p Piet

- Elke kind is jonger dan zijn/haar moeder
  $\forall x\forall y((K(x) \land M(y,x)) \to J(x,y))$ of
  $\forall x(K(x) \to J(x, m(x)))$
- Jan en Piet hebben dezelfde oma aan moeders-kant
  $\forall x,y,u,v((M(x,y) \land M(y,j) \land M(u,v) \land M(v,p)) \to x = u)$
  of
  $m(m(j)) = m(m(p))$

Vertalen

Vertalen van kennis in predicaatlogische formules maakt dat je over die kennis (automatisch) kunt redeneren.

Vertaal deze zinnen:

Alle mensen zijn sterfelijk	$\forall x(M(x) \to S(x))$
Socrates is een mens	$M(s)$
$\therefore$ Socrates is sterfelijk	$\therefore\ S(s)$

TUDelft

Redeneren

Waar of onwaar?

Bewering

$$\forall x(M(x) \to S(x)), M(s) \models S(s)?$$

Voor de predicatenlogica behandelen we

- college 14: Boommethode
- college 15: Resolutie
  geen Fitch ☹
- college 13: Syntax en Semantiek

TUDelft

Eerste-ordetalen: alfabet

Een eerste-ordetaal wordt ontworpen per toepassing, door niet-logische symbolen te specificeren

(Vertalen naar) niet-logische symbolen:

- predicaatsymbolen $P_0, P_1, \ldots, > 0$-plaatsig $(P, Q, R, \ldots)$
- functiesymbolen $f_0, f_1, \ldots, > 0$-plaatsig $(f, g, \ldots)$.
- namen $c_0, c_1, \ldots,$ eigenlijk 0-plaatsige functies $(a, b, c, \ldots)$

Daarnaast hebben ze allemaal logische symbolen:

- variabelen: $x_0, x_1, \ldots,$ we schrijven $x, y, z, \ldots$
- connectieven: $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$
- kwantoren: $\forall, \exists$
- gelijkheidssymbool (optioneel): $=$
- haakjes '(' en ')' en de komma ',' .

lft

2 typen 'dingen' zijn van belang

De objecten waar we het over hebben / Uitspraken over objecten die waar of onwaar zijn

Termen: de objecten waar we het over hebben

De verzameling termen *TERM* is de kleinste verzameling zdd:

1. alle variabelen x_i termen zijn $(i \in \mathbb{N})$,
2. alle namen c_i termen zijn,
3. als f een n-plaatsig functiesymbool is en $t_1, \ldots, t_n$ termen, ook $f(t_1, \ldots, t_n)$ een term is.

Voorbeelden van termen

j (jan), p (piet), s (socrates),
x, z,
$m(s)$ (de moeder van socrates), $+(3,5)$ (8), $+(x,2)$ $(x+2)$.

TUDelft

2 typen 'dingen' zijn van belang

De objecten waar we het over hebben / Uitspraken over objecten die waar of onwaar zijn

Formules: die kunnen een waarheidswaarde kunnen hebben

De verzameling formules $FORM$ is de kleinste verzameling zdd:

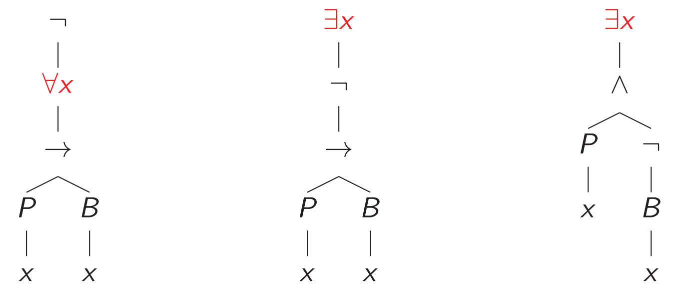
1. als P_i een n-plaatsig predicaatsymbool is en $t_1, \dots t_n$ termen zijn, $P(t_1, \dots, t_n)$ een formule is,
2. als t_1 en t_2 termen zijn, $t_1 = t_2$ een formule is,
3. als A en B formules zijn, $\neg A$ en $(A \star B)$ formules zijn,
4. als A een formule is en x een variabele, $\forall x A$, $\exists x A$ formules zijn.

Voorbeelden van formules (kunnen waar of onwaar zijn)

$A(b)$, $B(x)$, $R(x,a)$, $P(a, f(x,b))$
$A(x) \wedge B(a)$, $B(a) \to \neg R(x,a)$
$m(j) = m(p)$, $x = 8$, $2 = 5$, $b = m(t)$, $f(x) = 4$
$\forall x R(x,a)$, $\neg \exists y (R(x,y) \wedge \forall x A(y))$

Ontledingsbomen: Niet alle paarden zijn bruin

$$\neg \forall x (P(x) \to B(x)) \equiv \exists x \neg (P(x) \to B(x)) \equiv \exists x (P(x) \wedge \neg B(x))$$



Alleen $\forall x$ en $\exists x$ samen in een knoop

TUDelft

Oefening

Maak ontledingsbomen voor de volgende formules:

- $\forall x (K(x) \to J(x, m(x)))$
- $\exists x (M(x) \wedge \forall y (J(y) \to L(y,x)))$
- $\forall x (M(x) \to S(x))$
- $\neg (\forall x P(a,b) \wedge \exists y (H(y) \to \exists y H(x,y)))$

TUDelft

(Echte) Subformules

Subformule

Een formule A is een subformule van formule F als aan één van de volgende 4 voorwaarden wordt voldaan:

1. $A = F$,
2. $F = \neg C$ en A is een subformule van C,
3. $F = (C \star D)$ en A is een subformule van C of D,
4. $F = \mathrm{Q} x C$ en A is een subformule van C (waarbij $\mathrm{Q} \in \{\forall, \exists\}$).

Echte subformule

Een formule A is een echte subformule van formule F als A een subformule is van F en $A \neq F$.

TUDelft

Variabelen en Kwantoren

Maak een ontledingsboom voor $\forall x A(x,y) \rightarrow \exists z B(x,z)$

- x in $A(x,y)$ is gebonden aan de kwantor $\forall x$
- y in $A(x,y)$ is vrij
- x in $B(x,z)$ is vrij, niet gebonden aan $\forall x$
- het bereik van $\forall x$ is $A(x,y)$
- vrij en gebonden hebben betrekking op een voorkomen (optreden) van een variabele, niet op de variabele zelf.
- let dus op de scope!

Opgave

Geef aan welke variabelen in de onderstaande formules vrij zijn, en welke gebonden worden door welke kwantor.

1. $\exists x(P(x,y) \wedge Q(x))$
2. $\exists x \exists y P(x,y) \rightarrow Q(x)$
3. $\exists x(\exists y P(x,y) \rightarrow Q(x))$
4. $\forall x \forall y((P(x,y) \wedge Q(y)) \rightarrow \exists x R(x,z))$

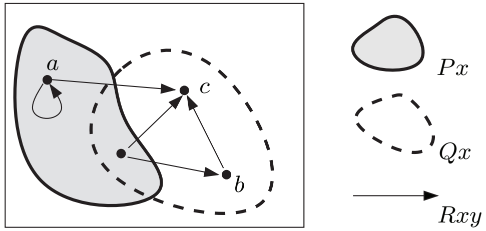
Waarheid van formules vaststellen

Wanneer is $\forall x(S(x) \rightarrow SI(x))$ waar?

En wanneer je alleen studenten beschouwt?

Dan is $\forall x(S(x) \rightarrow SI(x))$ equivalent met $\forall x SI(x)$

Waarheid in een **structuur**



Vraag: welke formules zijn waar in deze structuur?

1. $R(a,a)$
2. $R(x,x)$
3. $\neg\forall x(P(x) \rightarrow R(x,x))$
4. $\forall x \exists y[R(x,y)]$
5. $\forall x[P(x) \rightarrow \exists y R(x,y)]$

Opgave

Zij L een eerste-ordetaal met daarin predicaatsymbool

$R(x, y)$: x staat in relatie R tot y.

Geef een structuur (plaatje) die bestaat uit tenminste 5 objecten waarin de volgende formules alledrie tegelijkertijd waar zijn:

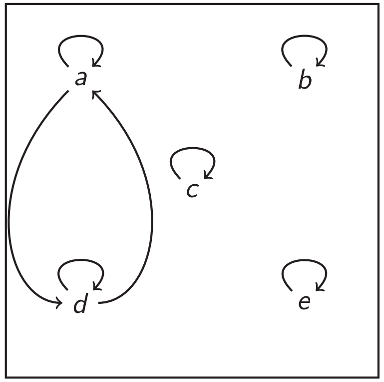
1. $\forall x R(x, x)$ reflexiviteit
2. $\forall x \forall y (R(x, y) \to R(y, x))$ symmetrie
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \land R(y, z)) \to R(x, z))$ transitiviteit

TU Delft

Een mogelijke structuur, en nog één

Tenminste 5 objecten

1. $\forall x R(x, x)$ reflexiviteit
2. $\forall x \forall y (R(x, y) \to R(y, x))$ symmetrie
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \land R(y, z)) \to R(x, z))$ transitiviteit



$R(x, y) \quad \longrightarrow$

TU Delft