TI1300: Redeneren en Logica

College 14: De boommethode voor de predicatenlogica

Tomas Klos

Algoritmiek Groep

Opgave

Zij L een eerste-ordetaal met daarin predicaatsymbool

$R(x, y)$: x staat in relatie R tot y.

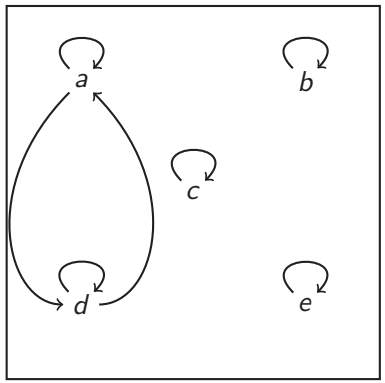
Geef een structuur (plaatje) die bestaat uit tenminste 5 objecten waarin de volgende formules alledrie tegelijkertijd waar zijn:

1. $\forall x R(x, x)$ — reflexiviteit
2. $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$ — symmetrie
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$ — transitiviteit

Een mogelijke structuur, en nog één

Tenminste 5 objecten

1. $\forall x R(x, x)$ — reflexiviteit
2. $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$ — symmetrie
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$ — transitiviteit



$R(x, y) \longrightarrow$

Observaties

- een formule is in verschillende structuren waar of onwaar
- je kunt oneindig veel structuren maken
- bij een redenering zijn we geïnteresseerd in de vraag:

  Is de conclusie waar in alle structuren waarin alle premissen waar zijn?

  ja? de redenering is geldig

  nee? een structuur waarin alle premissen waar zijn, maar de conclusie onwaar is een tegenvoorbeeld

Dit is niet zo simpel als bij de propositielogica!
Off topic: het kan zelfs niet in het algemeen

Structuur: een (formele) "situatiebeschrijving" waarin je formules, geschreven in je taal, kunt evalueren

Zij L een eerste-ordetaal met predicaat-, functiesymbolen, namen.

Definitie (Structuur)

Een structuur voor L is een tupel $\mathcal{A} = \langle D; R_0, \ldots; f_0, \ldots; d_0, \ldots \rangle$:

$D =$ *het domein van de structuur (een niet-lege verzameling)*

$R_i =$ *een verzameling voor elk predicaatsymbool in L*

$R_j \subseteq D$ *voor elk 1-plaatsig predicaatsymbool*

$R_k \subseteq D^2$ *voor elk 2-plaatsig predicaatsymbool, etc.*

$f_i =$ *een functie voor elk functiesymbool in L*

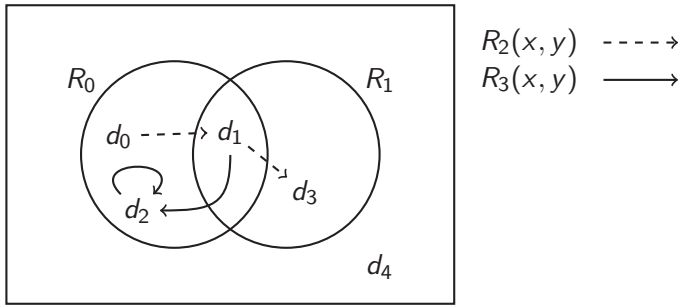
$f_j : D \to D$ *voor elke 1-plaatsige functie*

$f_k : D^2 \to D$ *voor elke 2-plaatsige functie, etc.*

$d_i =$ *een object uit D voor elke naam in L*

Voorbeeld van een structuur voor een zekere taal K

K bevat predicaatsymbolen $J(x)$, $M(x)$, $P(x,y)$, $H(x,y)$, en namen b en d



Dit is de structuur $\mathcal{B} = \langle D; R_0, R_1, R_2, R_3; d_1, d_3 \rangle$, waar

$D = \{d_0, d_1, d_2, d_3, d_4\}$ $\quad R_2 = \{(d_0, d_1), (d_1, d_3)\}$

$R_0 = \{d_0, d_1, d_2\}$ $\quad R_3 = \{(d_1, d_2), (d_2, d_2)\}$

$R_1 = \{d_1, d_3\}$

We schrijven

$J^{\mathcal{B}} = R_0, M^{\mathcal{B}} = R_1, P^{\mathcal{B}} = R_2, H^{\mathcal{B}} = R_3, b^{\mathcal{B}} = d_1, d^{\mathcal{B}} = d_3.$

Oefening

Zij M een eerste-ordetaal met predicaatsymbolen $A(x)$, $B(x)$ en $R(x,y)$.
Geef een structuur (formeel nu) met zo weinig mogelijk elementen waarin de volgende formules in taal M allen tegelijkertijd waar zijn.

1. $\exists x(A(x) \wedge B(x))$
2. $\exists x(\neg A(x) \wedge \forall y R(y,x))$
3. $\neg \forall x \neg B(x)$
4. $\exists x \exists y(\neg(A(y) \vee B(y)) \wedge R(x,y))$

$\mathcal{D} = \langle D; R_0, R_1, R_2 \rangle$, waar $A^{\mathcal{D}} = R_0, B^{\mathcal{D}} = R_1, R^{\mathcal{D}} = R_2$ en
$D = \{d_0, d_1\}, R_0 = \{d_0\}, R_1 = \{d_0\}, R_2 = \{(d_0, d_1), (d_1, d_1)\}$

Bedeling, structuur en interpretatie

We kunnen een formule met vrije variabelen alleen een waarheidswaarde toekennen als we de vrije variabele(n) een betekenis (denotatie) geven. Dit doet een bedeling.

Definitie (Bedeling)

Als $\mathcal{A}$ een structuur is voor taal L, dan is een functie

$$\beta : VAR \to |\mathcal{A}|$$

een bedeling. ($VAR = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $|\mathcal{A}|$ is het domein van $\mathcal{A}$.)

Definitie (Interpretatie)

Als L een eerste-ordetaal is, $\mathcal{A}$ een structuur voor L en β een bedeling, dan wordt het geordende paar $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ een interpretatie van L genoemd.

Model, vervulbaarheid

Definitie (Vervulbaarheid $\models$)

Als $v^{\mathcal{A},\beta}(F)$ de waarheidswaarde van formule F in interpretatie $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ is, dan geldt

$$\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models F \quad \textit{desda} \quad v^{\mathcal{A},\beta}(F) = 1.$$

Definitie (Model)

Een model voor een formule $F \in FORM$ is een interpretatie $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ zodanig dat $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models F$.

Definitie (Algemeen geldig)

Een formule F is algemeen geldig, $\models F$, als voor iedere interpretatie $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ geldt dat $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models F$.

Logisch gevolg, tegenvoorbeeld

Definitie (Logisch gevolg)

Een formule F is logisch gevolg van een verzameling formules $\Gamma \subseteq FORM$ als ieder model van Γ ook model van F is, oftewel, als voor alle interpretaties $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ geldt dat

$$\textit{als} \quad \langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \Gamma \quad \textit{dan} \quad \langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models F.$$

Definitie (Tegenvoorbeeld)

Een tegenvoorbeeld voor de redenering $\Gamma, \therefore F$ is een interpretatie $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ zodat wel geldt $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \Gamma$, maar niet $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models F$.

Boommethode

Is deze redenering logisch geldig?

$$\neg A \leftrightarrow (B \wedge C), A \wedge C \models \neg B$$

oftewel: is deze verzameling vervulbaar?

$$\{\neg A \leftrightarrow (B \wedge C), A \wedge C, \neg\neg B\}$$

Is deze redenering logisch geldig?

$$\forall x(M(x) \rightarrow S(x)), M(s) \models S(s)$$

oftewel: is deze verzameling vervulbaar?

$$\{\forall x(M(x) \rightarrow S(x)), M(s), \neg S(s)\}$$

Aanvullende regels (*Logica*, tabel 11.1, p. 159)

$\forall$-regels		$\exists$-regels		$=$-regel	sub-regel
$\neg\forall xA$	$*\forall xA$	$\neg\exists xA$	$\exists xA$		$s = t$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\exists \mathbf{x}\neg\mathbf{A}$	$\mathbf{A}[\mathbf{x} := \mathbf{t}]$	$\forall \mathbf{x}\neg\mathbf{A}$	$\mathbf{A}[\mathbf{x} := \mathbf{c}]$	$\mathbf{t} = \mathbf{t}$	$A[x := s]$
					$\vdots$
					$\mathbf{A}[\mathbf{x} := \mathbf{t}]$

Is deze redenering geldig?

$$\forall x(M(x) \rightarrow S(x)), M(s) \models S(s) \quad (\textit{Socrates})$$

Werkwijze

- Stel splitsen zo lang mogelijk uit.
- Eerst de $\exists$-variabelen substitueren (als het mag), dan de $\forall$!

Oefenen, wat anders?

Bepaal met de boommethode of de volgende redeneringen geldig zijn.

1. $\neg\exists x P(x) \models \forall x \neg P(x)$
2. $\neg\forall x P(x) \models \exists x \neg P(x)$
3. $\models \forall x R(x) \rightarrow \exists x R(x)$ dus het domein is niet leeg
4. $\models \forall x (C(x) \rightarrow \exists y C(y))$
5. $\models \forall x (\exists y C(y) \rightarrow C(x))$