TI1300: Redeneren en Logica

College 15: Boommethode en Resolutie

Tomas Klos

Algoritmiek Groep

TU Delft

Boommethode

Is deze redenering logisch geldig?

$$\neg A \leftrightarrow (B \wedge C), A \wedge C \models \neg B$$

oftewel: is deze verzameling vervulbaar?

$$\{\neg A \leftrightarrow (B \wedge C), A \wedge C, \neg\neg B\}$$

Is deze redenering logisch geldig?

$$\forall x(M(x) \rightarrow S(x)), M(s) \models S(s)$$

oftewel: is deze verzameling vervulbaar?

$$\{\forall x(M(x) \rightarrow S(x)), M(s), \neg S(s)\}$$

TU Delft

Aanvullende regels (*Logica*, tabel 11.1, p. 159)

$\forall$-regels		$\exists$-regels		$=$-regel	sub-regel
$\neg\forall xA$	$*\forall xA$	$\neg\exists xA$	$\exists xA$		$s = t$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\exists \mathbf{x}\neg\mathbf{A}$	$\mathbf{A}[\mathbf{x} := \mathbf{t}]$	$\forall \mathbf{x}\neg\mathbf{A}$	$\mathbf{A}[\mathbf{x} := \mathbf{c}]$	$\mathbf{t} = \mathbf{t}$	$A[x := s]$
					$\vdots$
					$\mathbf{A}[\mathbf{x} := \mathbf{t}]$

Is deze redenering geldig?

$$\forall x(M(x) \rightarrow S(x)), M(s) \models S(s) \quad (\textit{Socrates})$$

TU Delft

Oefenen, wat anders?

Bepaal met de boommethode of de volgende redeneringen geldig zijn.

- ✓ $\neg\exists xP(x) \models \forall x\neg P(x)$
- ✓ $\neg\forall xP(x) \models \exists x\neg P(x)$ — meteen sluiten mag
1. $\forall x\neg P(x) \models \neg\exists xP(x)$
2. $\exists x\neg P(x) \models \neg\forall xP(x)$
3. $\models \forall xR(x) \rightarrow \exists xR(x)$ — dus het domein is niet leeg
4. $\models \forall x(C(x) \rightarrow \exists yC(y))$
5. $\models \forall x(\exists yC(y) \rightarrow C(x))$
6. $\forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x) \models \exists xQ(x)$

TU Delft

Oude bekenden
Elk kind is jonger dan zijn moeder

Je kunt dus met de boommethode ook onderzoeken of:

$$\forall x(K(x) \to \exists y(M(y,x) \land J(x,y))) \models \forall xy((K(x) \land M(y,x)) \to J(x,y))$$

$$\forall xy((K(x) \land M(y,x)) \to J(x,y)) \models \forall x(K(x) \to \exists y(M(y,x) \land J(x,y)))$$

Geen regels op echte subformules toepassen!

Als je op $\forall x \exists y R(x,y)$ niet de $\forall$- maar de $\exists$-regel toepast: ↯

1	$\forall x \exists y R(x,y)$	premisse
2	$\forall x R(x,a)$	$\exists$-regel, 1 (FOUT!)

het moet zijn:

1	$\forall x \exists y R(x,y)$	premisse
2	$\exists y R(a,y)$	$\forall$-regel, 1
3	$R(a,b)$	$\exists$-regel, 2
4	$\exists y R(c,y)$	$\forall$-regel, 1
5	$R(c,d)$	$\exists$-regel, 4 (ander object voor c dan voor a!)
	$\vdots$	

Werkwijze

- Stel splitsen zo lang mogelijk uit.
- Eerst de $\exists$-variabelen substitueren (als het mag), dan de $\forall$!
- Geen regels op echte subformules toepassen!
- Sluit een tak niet? Vind een tegenvoorbeeld **in de tak**:
  - identificeer alle literalen:
    deze moeten allemaal waar zijn in de tegenvoorbeeld-structuur
  - identificeer alle $\forall$ formules (die met een $*$!):
    alle formules die hieruit afgeleid *kunnen* worden (met de tweede $\forall$-regel) moeten ook waar zijn

Kwantorvolgorde is belangrijk

$$\forall x \forall y A \equiv \forall y \forall x A$$
$$\exists x \exists y A \equiv \exists y \exists x A$$

Maar: $\exists x \forall y A$ is iets anders dan $\forall y \exists x A$!

$$\forall x \exists y A \not\equiv \exists y \forall x A$$

Bepaal met de boommethode: wat is waar?

$$\forall x \exists y R(x,y) \models \exists y \forall x R(x,y) \qquad \exists y \forall x R(x,y) \models \forall x \exists y R(x,y)$$
$$\forall x \exists y R(x,y) \models \exists x \forall y R(x,y) \qquad \exists x \forall y R(x,y) \models \forall x \exists y R(x,y)$$
$$\forall y \exists x R(x,y) \models \exists x \forall y R(x,y) \qquad \exists x \forall y R(x,y) \models \forall y \exists x R(x,y)$$
$$\forall y \exists x R(x,y) \models \exists y \forall x R(x,y) \qquad \exists y \forall x R(x,y) \models \forall y \exists x R(x,y)$$

Equivalente gekwantificeerde formules

Zie ook hoofdstuk 10: Meta-beweringen

Equivalent zijn:

$$\neg\forall xA \equiv \exists x\neg A$$
$$\neg\exists xA \equiv \forall x\neg A$$
$$\forall xA \equiv \neg\exists x\neg A$$
$$\exists xA \equiv \neg\forall x\neg A$$
$$\forall x(A \wedge B) \equiv \forall xA \wedge \forall xB$$
$$\exists x(A \vee B) \equiv \exists xA \vee \exists xB$$

Niet equivalent zijn:

$\forall x(A \vee B) \equiv \forall xA \vee \forall xB$ niet $\models$, wel $\dashv$

$\exists x(A \wedge B) \equiv \exists xA \wedge \exists xB$ niet $\dashv$, wel $\models$

Een bekende redenering

Zij D een eerste-ordetaal met de volgende elementen:

Predicaatsymbolen:

$D(x, y)$: x deelt y, we schrijven xDy of $x \mid y$ (infix notatie)

Functiesymbolen:

$p(x, y) =$ het product van x en y, we schrijven $x \cdot y$

$s(x, y) =$ de som van x en y, we schrijven $x + y$

$v(x, y) =$ het verschil van x en y, we schrijven $x - y$

Is de volgende redenering in D waar of onwaar?

$$\forall xy(\exists z(x \cdot z = y) \leftrightarrow (x \mid y)) \models$$
$$\forall xyz(((x \mid y) \wedge (x \mid y + z)) \rightarrow (x \mid z))$$

Je moet in deze boom ook rekenen; extra premissen nodig:

- $\forall x(x - x = 0)$, $\forall x(x + 0 = x)$
- $\forall xyz(x \cdot y - x \cdot z = x \cdot (y - z))$

Resolutie

Propositielogica:

$$\neg p \vee q, \neg q \vee r \vdash \neg p \vee r.$$

Predicatenlogica:

$$\forall x(M(x) \rightarrow S(x)), M(s) \vdash ?$$

2 obstakels:

1. kwantoren: Skolemnormaalvorm
2. variabelen: unificatie

Normaalvormen

Definitie (Prenexnormaalvorm)

Een formule $F \in FORM$ staat in prenexnormaalvorm als F de volgende vorm heeft:

$$Q_1 x_{i_1} \ldots Q_n x_{i_n} M.$$

De prenex $Q_1 x_{i_1} \ldots Q_n x_{i_n}$ bevat kwantoren, de matrix M niet.

Stelling

Voor elke formule $F \in FORM$ bestaat er een (of meerdere) equivalente formule F^p in prenexnormaalvorm.

Bewijs (constructief).

Herschrijf F volgens het algoritme in *Logica*, p. 153. QED

Herschrijven naar prenexnormaalvorm (*Logica*, p. 153)

Regels van links naar rechts toepassen

1. elimineer $\rightarrow$ en $\leftrightarrow$:

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$
$$A \leftrightarrow B \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$$

2. distribueer $\neg$ over de kwantoren:

$$\neg \forall x A \equiv \exists x \neg A$$
$$\neg \exists x A \equiv \forall x \neg A$$

3. breng kwantoren naar links ($\mathrm{Q} \in \{\forall, \exists\}$ en $\star \in \{\wedge, \vee\}$):

$$\forall x A \wedge \forall x B \equiv \forall x (A \wedge B)$$
$$\exists x A \vee \exists x B \equiv \exists x (A \vee B)$$
$$\mathrm{Q} x A \star B \equiv \mathrm{Q} x (A \star B) \qquad \text{als } x \notin VV(B)$$
$$A \star \mathrm{Q} x B \equiv \mathrm{Q} x (A \star B) \qquad \text{als } x \notin VV(A)$$

TU Delft

Voorbeeld van herschrijven

$$\begin{aligned}
\forall x Q(x) \rightarrow \exists y P(y) &\equiv \neg \forall x Q(x) \vee \exists y P(y) \\
&\equiv \exists x \neg Q(x) \vee \exists y P(y) \\
&\equiv \exists x (\neg Q(x) \vee \exists y P(y)) \quad \text{want } x \notin VV(\exists y P(y)) \\
&\equiv \exists x \exists y (\neg Q(x) \vee P(y)) \quad \text{want } y \notin VV(\neg Q(x))
\end{aligned}$$

Wat ook mag:

$$\begin{aligned}
&\equiv \exists x \neg Q(x) \vee \exists y P(y) \\
&\equiv \exists x \neg Q(x) \vee \exists x P(x) \qquad \text{want } x \notin VV(P(y)) \\
&\equiv \exists x (\neg Q(x) \vee P(x))
\end{aligned}$$

TU Delft

Oefenen

Herschrijf de volgende formules naar prenexnormaalvorm:

1. $\forall x \exists y (R(x, y) \rightarrow \exists z Q(z, y))$
2. $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \wedge \exists x R(x)$
3. $\forall x P(x) \rightarrow (\exists x Q(x) \rightarrow \forall x R(x))$

TU Delft

Skolemnormaalvorm

Voor resolutie hebben we conjunctieve normaalvorm nodig.
Een formule in prenexnormaalvorm staat niet in CNV:

$$\forall x \exists y \forall z ((P(x, y) \vee Q(x)) \wedge Q(z)).$$

(existentiële) kwantoren wegwerken heet skolemiseren.

TU Delft

Skolemnormaalvorm

Beschouw de formule

$$F = \forall x \exists y R(x, y),$$

bijv.: voor alle $x \in \mathbb{N}$ bestaat er een y zodanig dat $x < y$, bijvoorbeeld $y = x + 1$, dus y is een functie van x: $y = f(x)$.

Nu is

$$F^s = \forall x R(x, f(x))$$

de Skolemnormaalvorm van F. (f heet een Skolemfunctie.)

Skolemiseren

Er geldt niet in het algemeen dat $F \equiv F^s$, maar wel:

Stelling (Dat wat we nodig hebben)

F is onvervulbaar desda F^s onvervulbaar is.

Definitie (Skolemiseren)

Zij $F \in FORM$ (m.b.t. een eerste-ordetaal L), van de vorm

$$\forall y_0 \ldots \forall y_{n-1} \exists y_n M,$$

waar $n \geq 1$ en $M \in FORM$. Zij f een n-plaatsige functie (0-plaatsig is constante), die niet voorkomt in L. Dan is

$$\forall y_0 \ldots \forall y_{n-1} M[y_n := f(y_0, \ldots, y_{n-1})]$$

het resultaat van het skolemiseren van de kwantor $\exists y_n$.

Skolemnormaalvorm

Definitie (Skolemnormaalvorm)

Zij $F \in FORM$. Een Skolemnormaalvorm F^s van F is wat resulteert wanneer je

1. *F in prenexnormaalvorm brengt en de matrix in CNV schrijft*
2. *één voor één de existentiële kwantoren in de prenex skolemiseert.*

Tenslotte verwijderen we de $\forall$ kwantoren, en schrijven het resultaat als een verzameling disjuncties.

Voorbeeld

Wat is de Skolemnormaalvorm van

$$\exists x \forall y \exists u \forall v \forall w \exists z M(x, y, u, v, w, z)?$$

$$\forall y \forall v \forall w M(a, y, f(y), v, w, g(y, v, w)).$$

Voorbeeld

Zij F de formule

$$F = \exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \exists z Q(z).$$

- prenexnormaalvorm(en)? 2 mogelijkheden:

$$F_2^{p,c} = \forall x \exists y \exists z (\neg P(x, y) \vee Q(z))$$
$$F_1^{p,c} = \forall x \exists y (\neg P(x, y) \vee Q(y))$$

- Skolemnormaalvorm(en)? ook 2 mogelijkheden:

$$F_2^s = \forall x (\neg P(x, f(x)) \vee Q(f(x))) \quad = \{\neg P(x, f(x)) \vee Q(f(x))\}$$
$$F_1^s = \forall x (\neg P(x, f(x)) \vee Q(g(x))) \quad = \{\neg P(x, f(x)) \vee Q(g(x))\}$$

TUDelft