TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Tentamen TI1300 en IN1305-A
(Redeneren en) Logica

5 november 2010, 9.00–12.00 uur

LEES DEZE OPMERKINGEN AANDACHTIG DOOR VOORDAT JE BEGINT

- Vul duidelijk de **vakcode** in van je tentamen (IN1305-A of TI1300), zowel op het meerkeuzeformulier als op je antwoordvel van de open vragen.
- Dit tentamen bestaat uit 15 meerkeuzevragen in totaal goed voor 3 punten, en 5 open vragen in totaal goed voor 6 punten. (Je krijgt 1 punt kado.)

IN1305-A Maak je tentamen **IN1305-A**, beantwoord dan **alle meerkeuzevragen**, plus **open vragen 1 t/m 5**.

TI1300 Maak je tentamen **TI1300**, beantwoord dan **alle meerkeuzevragen**, plus **open vragen 2 t/m 6**.

- Wat betreft de meerkeuzevragen:
  - Er is voor iedere vraag maar één goed antwoord.
  - **Let op** dat de volgorde van de antwoorden op het antwoordformulier niet altijd A-B-C-D is!
  - Alle meerkeuzevragen tellen even zwaar.
  - Vul op het antwoordformulier je studienummer zowel met cijfers in als met blokjes.
  - Probeer max. 1 uur aan de meerkeuzevragen te besteden, de rest heb je nodig voor de open vragen.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of andere bronnen is tijdens dit tentamen **niet toegestaan**.
- Formuleer je antwoord in correct Nederlands of Engels en **schrijf leesbaar** (**gebruik eerst kladpapier**).
- **Beargumenteer je antwoord altijd volledig**: laat niets aan mijn interpretatie over.
- Voordat je je antwoorden inlevert, controleer of op ieder blaadje je naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.
- Totaal aantal pagina's (exclusief dit titelblad): 12.

Meerkeuzevragen

1. Stel dat formules $A, B \in PROP$ dusdanig zijn dat $A \models B$ geldt. Zij M_A de verzameling valuaties die model zijn voor A en M_B de verzameling valuaties die model zijn voor B. Wat kunnen we nu zeggen over de relatie tussen M_A en M_B?

   A. $M_A = M_B$.

   B. $M_A \subseteq M_B$**.**

   C. $M_B \subseteq M_A$.

   D. We kunnen niks over deze relatie zeggen.

Antwoord: Als B logisch gevolg is van A wil dat zeggen dat alle valuaties die model zijn voor A ook model zijn voor B. De verzameling modellen voor A is dus een deelverzameling van de verzameling modellen voor B, dus $M_A \subseteq M_B$.

Nakijkcommentaar: Deze vraag is niet zo goed gemaakt, maar het is geen slechte vraag: hij selecteert behoorlijk goed op eindscore. (Met andere woorden: de studenten die deze vraag goed hadden, hadden een groot aantal vragen goed, en vice versa.) D werd na het correcte antwoord B het vaakst gegeven, maar ook vrij veel mensen dachten dat het A of C moest zijn.

2. Zij gegeven een formule F in DNV met > 1 disjunctieleden. Als in precies één disjunctielid van F complementaire literalen voorkomen, wat kunnen we dan met zekerheid zeggen over F?

   A. F is een tautologie.

   B. F is een contradictie.

   C. F **is vervulbaar.**

   D. F is onvervulbaar.

Antwoord: Ieder disjunctielid van F is een conjunctie. Als in één disjunctielid complementaire literalen voorkomen is die conjunctie onvervulbaar, maar de andere disjunctieleden zijn wel vervulbaar, en dus de gehele formule ook. Er zijn andere disjunctieleden, omdat $F > 1$ disjunctieleden telt.

Nakijkcommentaar: Deze vraag is nog slechter gemaakt dan 1, en deze vraag selecteert bovendien slecht. Ik heb deze vraag niet meegeteld. Het goede antwoord (C) was nog wel het meest gegeven, vooral A en B waren daarna favoriet, en nog 18% dacht dat formule F onvervulbaar was!

3. Welke van de volgende uitspraken is waar?

   A. $ATOM \subseteq FORM$**.**

   B. $LIT \subseteq ATOM$.

   C. $VAR \subseteq FORM$.

   D. $LIT \subseteq ZIN$.

Antwoord: B is fout omdat atomen literalen zijn, maar niet andersom. Variabelen zijn termen en geen formules, dus C is ook fout, en literalen zijn formules die open mogen zijn, terwijl ZIN gesloten formules zijn (dus zonder vrije variabelen). De correcte relatie is $ATOM \subseteq FORM$: atomen zijn formules, namelijk van de vorm $P(t_1, \ldots, t_n)$ of $(t_1 = t_2)$.

Nakijkcommentaar: Deze vraag is best goed gemaakt: ongeveer 50% gaf het correcte antwoord. Maar hij selecteerde slecht en antwoord B was niet goed: erg weinig mensen kozen dit antwoord, wat wil zeggen dat het te duidelijk een fout antwoord was. Ik heb deze vraag ook niet meegeteld.

4. Welke van de volgende uitspraken is **niet** waar?
   - A. $ATOM \subseteq LIT$.
   - **B.** $TERM \subseteq ZIN$**.**
   - C. $VAR \subseteq TERM$.
   - D. $LIT \subseteq FORM$.

Antwoord: Zoals hierboven uitgelegd, zijn atomen literalen, dus A is waar. Variabelen zijn termen (net als constanten en functies), en literalen zijn formules, van de vorm A of $\neg A$ waar $A \in ATOM$. Het correcte antwoord is B: termen zijn een andere syntactische categorie dan formules waar zinnen toe behoren.

Nakijkcommentaar: Het meest gegeven antwoord hier was C, dat werd iets vaker gekozen dan het goede antwoord B.

5. Stel dat $\Gamma \subseteq FORM$ en $F \in FORM$ dusdanig zijn dat tenminste één tak in een boom voor de redenering $\Gamma \models F$ **niet** sluit. Wat kunnen we dan met zekerheid zeggen?
   - A. F is een contradictie.
   - B. $\Gamma \models \neg F$.
   - **C. F is geen tautologie.**
   - D. Γ is onvervulbaar.

Antwoord: De redenering is ongeldig, dus kan de conclusie een contradictie zijn, maar het hoeft niet. A is dus onwaar. Omdat de redenering ongeldig is, volgt F niet uit Γ, maar dat betekent niet dat $\neg F$ uit Γ volgt (zie de open vraag over de metabewering, waar een tegenvoorbeeld voor deze bewering wordt gegeven), dus C is ook niet waar. Γ is wel vervulbaar, want er is een tegenvoorbeeld, en dat vervult per definitie $\Gamma \cup \{\neg F\}$, dus ook Γ. Het goed antwoord is C: F is geen tautologie, want als F dat wel zou zijn, volgt F uit alle mogelijke verzamelingen premissen, en sluit geen enkele boom voor een redenering met F als conclusie.

Nakijkcommentaar: Dit was een goede vraag, behoorlijk goed gemaakt, met goede afleiders voor de mindere goden. Nog best veel mensen dachten B of D.

6. Zij gegeven een redenering $\Gamma \therefore C$ met 0 of meer premissen, waar $\Gamma \subseteq PROP$ en $C \in PROP$. Als één van de premissen een contingentie is, wat kunnen we dan met zekerheid zeggen?
   - A. De redenering is logisch geldig.
   - B. De redenering is niet logisch geldig.
   - C. De verzameling $\Gamma \cup \{\neg C\}$ is onvervulbaar.
   - **D. We kunnen niets bijzonders zeggen.**

Antwoord: Als één van de premissen een contingentie is, kunnen we niets bijzonders zeggen over de geldigheid van de redenering (antwoord D). Een tegenvoorbeeld kan voorkomen, maar het hoeft niet. Dat wordt niet afgedwongen door dit gegeven.

Nakijkcommentaar: Hier geldt hetzelfde als bij vraag 5 over de kwaliteit van de vraag is gezegd.

7. Zij gegeven een redenering $\Gamma \therefore C$, waar $\Gamma \subseteq PROP$ en $C \in PROP$. Als $\Gamma = \emptyset$, wat kunnen we dan met zekerheid zeggen?
   - A. De redenering is logisch geldig.
   - B. De redenering is niet logisch geldig.
   - C. De verzameling $\Gamma \cup \{\neg C\}$ is onvervulbaar.
   - **D. We kunnen niets bijzonders zeggen.**

Antwoord: Als de conclusie een tautologie is, is de redenering geldig, en anders niet. We kunnen dus niks bijzonders zeggen, antwoord D.

Nakijkcommentaar: De meeste mensen dachten A, wat wel raar zou zijn. Het goede antwoord was het op één na vaakst gegeven antwoord.

8. Zij gegeven een redenering $\Gamma \therefore C$, waar $\Gamma \subseteq PROP$ en $C \in PROP$. Als $\Gamma \cup \{\neg C\}$ vervulbaar is, wat kunnen we dan met zekerheid zeggen?
   - A. De redenering is logisch geldig.
   - **B. De redenering is niet logisch geldig.**
   - C. De conclusie is een contradictie.
   - D. De conclusie is een contingentie.

Antwoord: De valuatie die de verzameling $\Gamma \cup \{\neg C\}$ vervult vormt een tegenvoorbeeld, dus de redenering is niet logisch geldig: antwoord B is correct.

Nakijkcommentaar: Kwalitatief een prima vraag, ook nog goed gemaakt: 65% had dit goed.

9. Zij gegeven de eerste-ordetaal L met daarin 1-plaatsige predicaatsymbolen A en B, en 2-plaatsig predicaatsymbool R. Zij verder gegeven de structuur $\mathcal{F} = \langle D; R_0, R_1, R_2 \rangle$ voor deze taal, waar $D = \{d_0, d_1, d_2, d_3, d_4\}$, $R_0 = \{d_0, d_1, d_3\}$, $R_1 = \{d_1, d_2\}$, en $R_2 = \{(d_1, d_1), (d_2, d_3), (d_2, d_2)\}$. Er geldt dat $A^{\mathcal{F}} = R_0$, $B^{\mathcal{F}} = R_1$ en $R^{\mathcal{F}} = R_2$.

   Welke van de volgende formules in **niet** waar in $\mathcal{F}$?
   - **A.** $\forall x(A(x) \to \exists y(B(y) \wedge R(y, x)))$**.**
   - B. $\exists x \neg(\neg A(x) \to B(x))$.
   - **C.** $\forall x(B(x) \to \exists y(A(y) \wedge R(y, x)))$**.**
   - D. $\neg \exists x(\forall y(\neg A(y) \vee \neg R(x, y)) \wedge B(x))$.

Antwoord: Er waren hier dus onbedoeld 2 antwoorden correct: A en C (ik dacht oorspronkelijk alleen A). C is ook waar omdat ik daarin ben vergeten y en x om te wisselen in $R(y, x)$; als je dat doet is C wel waar. Het is het handigst om een plaatje voor deze structuur te tekenen, en daarin na te gaan of de verschillende uitspraken waar of onwaar zijn. Antwoord A is onwaar omdat er voor element $d_0 \in A^{\mathcal{F}}$ geen element in $B^{\mathcal{F}}$ bestaat dat ermee in relatie $R^{\mathcal{F}}$ zit. Antwoord B is waar omdat object d_4 in $A^{\mathcal{F}}$ noch in $B^{\mathcal{F}}$ zit. Antwoord C is dus ook onwaar, omdat er voor object $d_2 \in B^{\mathcal{F}}$ geen element in $A^{\mathcal{F}}$ bestaat dat ermee in relatie $R^{\mathcal{F}}$ zit. (De bedoeling was dus dat deze formule zou zeggen dat er voor alle elementen met eigenschap B een element met eigenschap A bestaat waarmee het relatie R heeft. Die formule is *wel* waar in $\mathcal{F}$.) Antwoord D is een herschrijving van de bedoelde formule bij antwoord C:

$$\begin{aligned}
\neg \exists x(\forall y(\neg A(y) \vee \neg R(x, y)) \wedge B(x)) &\equiv \forall x \neg(B(x) \wedge \forall y(\neg A(y) \vee \neg R(x, y))) \\
&\equiv \forall x(\neg B(x) \vee \neg \forall y(\neg A(y) \vee \neg R(x, y))) \\
&\equiv \forall x(B(x) \to \exists y \neg(\neg A(y) \vee \neg R(x, y))) \\
&\equiv \forall x(B(x) \to \exists y(A(y) \wedge R(x, y)))
\end{aligned}$$

Deze formule is dus wel waar.

Nakijkcommentaar: Hier waren dus 2 antwoorden correct, zowel A als C. Samen werden die door driekwart van de deelnemers gegeven. De overige antwoorden waren gelijk verdeeld over B en D.

10. Beschouw opnieuw de taal van de vorige vraag, en ook de formules
    - $F = \exists x(A(x) \wedge \forall y(B(y) \to R(y, x)))$ en

- $G = \forall x(B(x) \to \exists y(A(y) \wedge R(x,y)))$.

Welke van de volgende uitspraken is waar?

A. $F \models G$.
B. $G \models F$.
C. $\models F$.
D. $\models G$.

Antwoord: F en G zijn duidelijk geen tautologieën: je kunt voor elke formule makkelijk een structuur opstellen waarin de formules onwaar is (probeer dat eens!). Als er een object met eigenschap A bestaat zodat alle objecten met eigenschap B er een relatie mee hebben, dan geldt voor alle objecten met eigenschap B dat er een object met eigenschap A bestaat waar ze een relatie mee hebben, dus $F \models G$ (antwoord A). Aan de andere kant, als er voor alle objecten met eigenschap B een object met eigenschap A bestaat waarmee ze relatie R hebben, dan wil dat nog niet zeggen dat dat voor alle objecten met eigenschap B *hetzelfde* object met eigenschap A is, dus F volgt niet uit G (antwoord B is dus fout).

Nakijkcommentaar: Deze vraag is slecht gemaakt: 50% dacht C of D. Het goede antwoord was het op twee na vaakst gegeven! Ik heb deze vraag niet meegeteld: het was ook veel werk om hier het goede antwoord te vinden. Eigenlijk zou je (in het ergste geval) 4 keer de boommethode moeten toepassen om het antwoord te vinden, als je het niet kon afleiden zoals hierboven.

11. Welke van de onderstaande paren formules zijn equivalent?

A. $q \to \neg p$ en $p \wedge q$.
B. $\neg q$ **en** $\neg((p \wedge \neg(q \to p)) \vee q)$.
C. $p \vee \neg q$ en $\neg(p \wedge \neg q)$.
D. $p \vee (q \to p)$ **en** $p \leftrightarrow (q \vee p)$.

Antwoord: $q \to \neg p \equiv \neg\neg(q \to \neg p) \equiv \neg(q \wedge p)$ dus antwoord A is onjuist. Antwoord C is ook onjuist omdat $\neg(p \wedge \neg q) \equiv \neg p \vee q$. Antwoord B is juist, maar—zo ontdek ik net—antwoord D ook: mijn excuses. Waarheidstafels tonen dit aan.

Nakijkcommentaar: Ook hier dus per ongeluk 2 correcte antwoorden. 86% gaf één van die twee antwoorden. Verder was dit een prima vraag.

12. Zij A, B en C verzamelingen. Beschouw de volgende bewering:

Bewering. *Als* $A \subseteq B$ *en* $B \in C$, *dan* $A \subseteq C$.

Deze bewering is niet waar. Welke verzamelingen vormen een tegenvoorbeeld?

A. $A = \{0\}$, $B = \{0,1\}$ en $C = \{0,1\}$.
B. $A = \{0,1\}$, $B = \{0,1\}$ **en** $C = \{\{0,1\}\}$.
C. $A = \{0\}$, $B = \{0\}$ en $C = \{0,\{0\}\}$.
D. $A = \{0,1\}$, $B = \{1\}$ en $C = \{\{1\}\}$.

Antwoord: Om een implicatie onwaar te maken, moet het antecedent waar zijn, en het consequent onwaar. Het antecedent is een conjunctie, die waar is als beide conjunctieleden waar zijn. Verzamelingen A, B en C moeten dus in elk geval zodanig zijn dat $A \subseteq B$ en $B \in C$. Antwoord D valt dus gelijk af, want voor die verzamelingen geldt niet dat $A \subseteq B$. Voor antwoord A geldt niet dat $B \in C$, dus die valt ook af. Het consequent moet bovendien onwaar zijn, dus er mag niet gelden dat $A \subseteq C$, dus er moet een element in A zitten dat niet in C zit. Het juiste antwoord is dus niet C, want daar geldt wel dat $A \subseteq C$, maar het is B, want beide elementen van A zitten niet in C.

Nakijkcommentaar: Een prima vraag: goed gemaakt, onderscheidend, en een nette verdeling van antwoorden over de verschillende foute alternatieven.

13. Zij $A, B \in PROP$. Beschouw de volgende bewering.

    Bewering. $(\models A \quad \Rightarrow \quad \models B) \quad \Rightarrow \quad \models A \to B.$

    De bewering is niet waar. Welke formules vormen een tegenvoorbeeld?

    A. $A = p \vee \neg p$ en $B = p$.

    B. $A = p \wedge \neg p$ en $B = \neg p$.

    C. $A = p$ **en** $B = p \wedge \neg p$**.**

    D. $A = p$ en $B = p \vee \neg p$.

Antwoord: De bewering is een implicatie, en die is onwaar, wordt gezegd. Dat wordt aangetoond door formules A en B die het antecedent waar maken en het consequent onwaar. Het antecedent is zelf ook een implicatie, die waar is als het antecedent onwaar is, of het consequent waar. De formule voor B bij antwoord D maakt weliswaar het antecedent van de bewering waar, maar het consequent niet onwaar, dus D valt af. Het antecedent is ook waar als A geen tautologie is, dus B en C blijven over. De formules bij B maken het consequent van de bewering niet onwaar en vallen dus ook af: het correcte antwoord is dus C.

Nakijkcommentaar: Deze vraag heb ik niet meegeteld, hij is slecht gemaakt, fout antwoord A werd erg vaak gegeven en de vraag was niet onderscheidend. Van deze vraag vind ik het jammer dat hij zo slecht gemaakt is. Ik denk dat dit basiskennis over redeneren betreft, die blijkbaar door maar ongeveer een kwart van de studenten wordt beheerst. Ik hoop wel dat deze vraag, met een voorbeeld van hoe tegenvoorbeelden voor een metabewering eruit zien, een aantal van jullie hierover tenminste wat heeft geleerd, en dat die kennis bij de meta-bewering open vraag is gebruikt.

14. Zij A, B en C verzamelingen. Welke uitspraak is waar?

    A. Als $A \subseteq B$ en $B \in C$, dan $A \in C$.

    B. Als $A \subseteq B$ en $B \in C$, dan $A \subseteq C$.

    C. Als $A \subseteq B$ en $B \subseteq C$, dan $A \in C$.

    D. Als $A \subseteq B$ **en** $B \subseteq C$**, dan** $A \subseteq C$**.**

Antwoord: Van de bewering bij antwoord B is hierboven al gegeven dat hij onwaar is. Het correcte antwoord is D, wat we ook op het college al hebben gezien.

Nakijkcommentaar: Deze vraag is het beste gemaakt van allemaal (88% goed), en had dus weinig onderscheidend vermogen.

15. Welke van de volgende formules is geen element van $PROP$?

    A. $(p \vee \neg\neg p) \leftrightarrow q$

    B. $(\neg\neg\neg q \vee \neg p)$

    C. r

    D. $(\neg p \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg p))$

Antwoord: Het juiste antwoord is A, omdat er geen haakjes om deze formule heen staan. Het verwarrende bij deze vraag was dat we soms de conventie gebruikten dat we buitenste haakjes weglieten, maar we gebruikten ook de conventie om p, q, etc. te gebruiken in plaats van p_0, p_1, etc. In deze vraag hanteerde ik wel de tweede conventie, maar niet de eerste, wat nogal verwarrend was. Maar het vaakst gegeven antwoord was toch nog B, waarbij dit verhaal niet op gaat.

Nakijkcommentaar: Zoals ik zei, een slechte vraag: erg slecht gemaakt en weinig onderscheidend. Ik heb deze vraag niet meegeteld.

Open vragen

1. **Verzamelingen (alléén voor IN1305-A)**

(a) (1 punt) Geef de definitie van de machtsverzameling van een gegeven verzameling B.

Antwoord: De machtsverzameling van verzameling B is de verzameling van alle deelverzamelingen van B, oftewel, $2^B = \{X \mid X \subseteq B\}$.

Nakijkcommentaar: Deze vraag is redelijk gemaakt. Wat ik opvallend vaak zag was een definitie in de trant van "de verzameling van alle *combinaties* van elementen van A" .... Ik begrijp niet zo goed waar dat vandaan komt. Leer maar gewoon de definitie van machtsverzameling als de verzameling van alle deelverzamelingen uit je hoofd.

De context waarin je deze verzameling vaak tegenkomt is die van een functie die aan objecten in het domein een deelverzameling van een verzameling toekent. Als ik het bijvoorbeeld over vriendschapsrelaties tussen studenten wil hebben, en de verzameling studenten S noem, dan is de vriendschapsfunctie v te beschouwen als: $v : S \to 2^S$. Elke student heeft een unieke verzameling studenten als vriend, en aan elke student in S kent de functie v dus een deelverzameling van S toe, dus een element van 2^S. (Dat kan dus ook S zijn, voor iemand die alle studenten als vriend heeft, of $\emptyset$ voor iemand die geen studenten als vriend heeft.)

We hebben de machtsverzameling ook gezien in de context van de logisch-gevolg relatie: $\models \subseteq 2^{PROP} \times PROP$, want deze relatie bestaat tussen verzamelingen formules enerzijds en formules anderzijds. Elementen van de $\models$-relatie zijn bijvoorbeeld $\{(\{p, q\}, p \wedge q), (\{p\}, p \vee q), (\{p \to q, \neg q\}, \neg p), (\{p \to q, p\}, q), \ldots\}$. Het eerste element van elk geordend paar is een verzameling formules, dus een deelverzameling van $PROP$, en dus een element van de machtsverzameling van $PROP$, 2^{PROP}, en het tweede element van elk geordend paar is een formule uit $PROP$ die logisch volgt uit de verzameling formules in het eerste element.

(b) (1 punt) Zij gegeven de verzameling $A = \{a, b, c\}$. Geef de machtsverzameling 2^A als opsomming van elementen.

Antwoord: De machtsverzameling van A is $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Nakijkcommentaar: Dit is aardig goed gegaan. Een opvallend vaak gemaakte fout was dat de hele machtsverzameling niet tussen { en } werd geschreven, of de individuele elementen van de machtsverzameling niet als verzamelingen werden geschreven (dus zonder accolades, of tussen gewone haakjes). Soms miste $\emptyset$ als element of werd $\{\emptyset\}$ als element genoemd. Dat is het natuurlijk niet, want $\emptyset \notin A$.

(c) (4 punten) Zij A, B en C verzamelingen. Bepaal of de volgende bewering waar of onwaar is. Geef een duidelijk antwoord. Als je antwoordt dat de bewering onwaar is, geef dan een tegenvoorbeeld dat dit aantoont (in de vorm van *specifieke, concrete verzamelingen met elementen*, dus geen Venn-diagram!) en leg uit hoe dit tegenvoorbeeld aantoont dat de bewering onwaar is.
Bewering. *Als* $A \subseteq B$ *en* $C \subseteq B$, *dan* $B^c \subseteq (A \cup C)^c$.

Antwoord: Deze bewering is waar, waar een Venndiagram je snel van zou moeten kunnen doordringen. Intuïtief zegt deze bewering dat als x element is van A of C, dan x element is van B. Dan is dus $A \cup C$ deelverzameling van B, en dus ook de 'contrapositie' daarvan waar, dat B^c deelverzameling is van $(A \cup C)^c$. Maar dit argument is geen bewijs, dat volgt hieronder. De bewering is een implicatie, die we dus kunnen bewijzen door het antecedent voor waar aan te nemen en onder die aanname het consequent af te leiden. Het feit dat we met het complement van een verzameling te maken hebben suggereert bovendien een bewijs uit het ongerijmde.

Bewijs. Stel dat $A \subseteq B$ en $C \subseteq B$, dus dat voor alle x geldt dat als $x \in A$, dan $x \in B$, en als $x \in C$, dan $x \in B$. Te bewijzen is dat $B^c \subseteq (A \cup C)^c$, oftewel dat voor alle x geldt dat als $x \in B^c$, dan $x \in (A \cup C)^c$.
Neem dus een willekeurige $e \in B^c$, waarvoor we moeten aantonen dat $e \in (A \cup C)^c$. Neem, ten behoeve van een bewijs uit het ongerijmde, aan dat $e \in (A \cup C)$, dus dat $e \in A \vee e \in C$. We maken op basis hiervan een gevalsonderscheid.

$e \in A$**:** Nu geldt volgens het antecedent (dat we voor waar hebben aangenomen), dat $e \in B$.

$e \in C$**:** Ook nu geldt volgens het antecedent dat $e \in B$.

In beide gevallen, dus in het algemeen, geldt $e \in B$. Maar e was willekeurig gekozen uit B^c, dus dat levert een tegenspraak op. De aanname dat $e \in (A \cup C)$ kan dus niet juist zijn, zodat we moeten concluderen dat $e \in (A \cup C)^c$. Omdat e willekeurig was gekozen uit B^c, geldt voor alle x dat als $x \in B^c$, dan $x \in (A \cup C)^c$, oftewel dat $B^c \subseteq (A \cup C)^c$. QED

Nakijkcommentaar: Hoewel maar weinig mensen dachten dat dit onwaar was, zijn hier toch veel punten blijven liggen, gemiddeld werd maar ongeveer 40% van de punten verdiend. Het grootste probleem is dat mensen zich niet houden aan de bewijstechniek voor het bewijzen van een deelverzamelingsrelatie. Ook zag ik vaak argumentaties waarbij eigenlijk gewoon de bewering in woorden werd opgeschreven, met ergens het woord "dus" ertussen, bij wijze van verklaring dat het consequent inderdaad volgt als het antecedent voor waar is aangenomen.

De geschikte bewijstechniek is duidelijk: neem aan dat het antecedent waar is, en leidt het consequent af. Dat is een deelverzameling-uitspraak, dus neem een willekeurig element uit de linkerverzameling, en laat aan de hand van hetgeen je als antecedent hebt aangenomen zien dat dat element ook in de rechterverzameling zit.

2. **Boommethode (voor zowel IN1305-A als TI1300)**

Beantwoord met behulp van de boommethode de vraag of de volgende bewering waar of onwaar is. Geef duidelijk antwoord en leg uit hoe je antwoord volgt uit je boom. Als je antwoordt dat de bewering onwaar is, geef dan een tegenvoorbeeld dat dit aantoont (dat mag in de vorm van een plaatje) en leg uit hoe dit tegenvoorbeeld aantoont dat de bewering onwaar is.

(a) (6 punten)
Bewering. $\forall x(K(x) \to \exists y(M(y,x) \land J(x,y))) \models \forall x \forall y((K(x) \land M(y,x)) \to J(x,y))$.

Antwoord: Dit is onwaar. Het zijn de twee alternatieve vertalingen van "elk kind is jonger dan zijn moeder," waar we het op het college over hebben gehad.

1.	$*$	$\forall x(K(x) \to \exists y(M(y,x) \land J(x,y)))$	premisse
2.	✓	$\neg\forall x \forall y((K(x) \land M(y,x)) \to J(x,y))$	¬-conclusie
3.	✓	$\exists x \neg\forall y((K(x) \land M(y,x)) \to J(x,y))$	∀-regel, 2
4.	✓	$\neg\forall y((K(a) \land M(y,a)) \to J(a,y))$	∃-regel, 3
5.	✓	$\exists y \neg((K(a) \land M(y,a)) \to J(a,y))$	∀-regel, 4
6.	✓	$\neg((K(a) \land M(b,a)) \to J(a,b))$	∃-regel, 5
7.	✓	$(K(a) \land M(b,a)) \land \neg J(a,b)$	→-regel, 6
8.	✓	$K(a) \land M(b,a)$	∧-regel, 7
9.		$\neg J(a,b)$	∧-regel, 7
10.		$K(a)$	∧-regel, 8
11.		$M(b,a)$	∧-regel, 8
12.	✓	$K(a) \to \exists y(M(y,a) \land J(a,y))$	∀-regel, 1
13.	✓	$\neg K(a) \lor \exists y(M(y,a) \land J(a,y))$	∀-regel, 1

Linkertak:

14 $\neg K(a)$ ∨-regel, 13

Sluit (10, 14)

Rechtertak:

15.	✓	$\exists y(M(y,a) \land J(a,y))$	∨-regel, 13
16.	✓	$M(c,a) \land J(a,c)$	∃-regel, 15
17.		$M(c,a)$	∧-regel, 16
18.		$J(a,c)$	∧-regel, 16

Blijft open

In de rechtertak moeten we voor y een *nieuwe naam* kiezen, a en b zijn al gebruikt, dus moeten we c nemen. Merk op dat als je je hier niet aan het 'nieuwe naam' voorschrift houdt, en bijvoorbeeld $y := b$ substitueert, je ook deze tak kunt sluiten (vanwege $\neg J(a,b)$ en $J(a,b)$), wat zou impliceren dat de rechterformule volgt uit de linkerformule. Dan zou je dus ook niet het hierna gegeven tegenvoorbeeld vinden, dat aantoont dat de rechterformule helemaal niet volgt uit de linkerformule.

Wanneer we ons dus wel netjes aan de regels houden (zoals in de boom hierboven), kunnen we na regel 18 in formule 1 weliswaar $x := b$ of $x := c$ invullen, maar dat helpt ons niet verder. We concluderen dus dat de tak niet sluit. Nu moeten we als tegenvoorbeeld een structuur construeren waarin formules 1, 9, 10, 11, 17 en 18 waar zijn. Dat is bijvoorbeeld de structuur $\mathcal{G} = \langle D; R_0, R_1, R_2; d_0, d_1, d_2 \rangle$ waar $K^{\mathcal{G}} = R_0$, $M^{\mathcal{G}} = R_1$, $J^{\mathcal{G}} = R_2$, $a^{\mathcal{G}} = d_0$, $b^{\mathcal{G}} = d_1$ en $c^{\mathcal{G}} = d_2$. Verder geldt dat

$$\begin{aligned} D &= \{d_0, d_1, d_2\}, \\ R_0 &= \{d_0\}, \\ R_1 &= \{(d_1, d_0), (d_2, d_0)\}, \\ R_2 &= \{(d_0, d_2)\}. \end{aligned}$$

In deze structuur is *wel* de premisse van de redenering waar, want voor alle elementen in het domein geldt dat als ze in $K^{\mathcal{G}}$ zitten (dat is alleen d_0), er een element bestaat (dat is d_2) zodat $(d_2, d_0) \in M^{\mathcal{G}}$ en $(d_0, d_2) \in J^{\mathcal{G}}$. De conclusie van de redenering is echter *niet* waar, want voor d_0 en d_1 geldt wel dat $d_0 \in K^{\mathcal{G}} \land (d_1, d_0) \in M^{\mathcal{G}}$, maar niet dat $(d_0, d_1) \in J^{\mathcal{G}}$.

Nakijkcommentaar: Deze vraag werd door TI1300-studenten beter gemaakt dan door IN1305 studenten: 40% versus 35% van de punten. Het substitueren werd het vaakst fout gedaan, en vaak met dramatisch gevolg, omdat je door verkeerd te substitueren makkelijk tot de conclusie kunt komen dat de redenering geldig is. Ook werden nog vaak boommethode-regels op echte subformules toegepast, en miste vaak een antwoord. Degenen die al ontdekten dat de boom niet afsloot, misten ook nog wel eens een tegenvoorbeeld, zelfs niet als plaatje, en de gevraagde uitleg van de manier waarop het tegenvoorbeeld (als het correct was) aantoonde dat de bewering onwaar is miste ik helemaal erg vaak. Dat is, in elk geval bij een onware bewering, het belangrijkste onderdeel, wat mij betreft! Doe je voordeel met die kennis.

Een specifieke fout die ik opvallend vaak zag, was dat mensen $\neg\forall x\forall y(\ldots)$ in één keer herschreven naar $\exists x\exists y\neg(\ldots)$. Een andere fout die ik hier wil noemen is dat soms formule 10: $K(a)$ werd afgevinkt wanneer hij werd gebruikt om de contradictie in de linkertak aan te geven, en dan bij het construeren van het tegenvoorbeeld in de rechtertak (waar de 'stam' van de boom ook toe behoort!) over het hoofd werd gezien. Dat is heel kwalijk, want in het tegenvoorbeeld is het feit dat object a eigenschap K heeft cruciaal! Je moet formules alleen afvinken wanneer je er een regel van de boommethode op hebt toegepast, niet wanneer ze als één van de complementaire literalen in een contractie worden gebruikt voor het afsluiten van een tak.

3. **Meta-beweringen (voor zowel IN1305-A als TI1300)**

Zij A en B formules uit $PROP$. Bepaal of de volgende bewering waar of onwaar is. Als je denkt dat de bewering waar is, geef er dan een bewijs voor. Als je denkt dat een bewering onwaar is, geef dan een tegenvoorbeeld dat dit aantoont, en *leg uit* hoe je tegenvoorbeeld de onwaarheid van de bewering laat zien.

(a) (6 punten)
Bewering. *Als* $\sim(A \models B)$ *dan* $A \models \neg B$.

Antwoord: Deze bewering is onwaar. Hij zegt dat als B niet logisch gevolg is van A, dan $\neg B$ logisch gevolg is van A. Maar het hoeft niet zo te zijn dat altijd ofwel een formule, ofwel de negatie van die formule logisch volgt uit een andere formule. Het kan heel goed zo zijn dat geen van beide uit die andere formule volgt. Dit toont onder andere het volgende tegenvoorbeeld aan. Neem voor A de formule p en voor B de formule q. Voor deze formules is het antecedent van de bewering wel waar, maar het consequent niet. Er geldt namelijk wel dat $\sim(A \models B)$, want B is geen logisch gevolg van A: het is niet zo dat alle valuaties die p waar maken, ook q waar maken. Neem als voorbeeld een valuatie v waarvoor $v(p) = 1$ en $v(q) = 0$. Aan de andere kant is het consequent onwaar, want niet alle valuaties die A waar maken, maken ook B waar: een valuatie w met $w(p) = w(q) = 1$ toont dit aan.

Nakijkcommentaar: Tsja, dramatisch. Zo'n beetje 75% van de punten is hier verspeeld. Sowieso dacht zeker de helft dat deze bewering waar is, dat vind ik echt teleurstellend. Verder moest ik vaak nog hard zoeken naar het eigenlijke antwoord: schrijf op of je denkt dat de bewering waar of onwaar is! Degenen die doorhadden dat dit waar was kwamen met bewijzen daarvoor op de proppen die totaal niet leken op hoe zo'n bewijs eruit hoort te zien. Al met al sprak er weinig begrip uit jullie antwoorden van de betekenis van de notie van *logisch gevolg*, wat een **kernbegrip** in dit vak is.

4. **Inductie (voor zowel IN1305-A als TI1300)**

(a) (6 punten) Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen $n \geq 1$ geldt dat $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Antwoord:

Bewijs. Laat $P(n)$ de eigenschap van natuurlijk getal $n \geq 1$ zijn dat $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Basis ($n = 1$): Voor $n = 1$ geldt $P(n)$, want

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Inductiestap: Stel dat $P(k)$ geldt voor een willekeurig getal $k \geq 1$, dus dat $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k}{k+1}$, dit is de inductiehypothese (IH). Te bewijzen is dat dan de eigenschap ook geldt voor getal $k+1$, oftewel dat $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k+1}{k+1+1}$. We tonen nu aan dat dit inderdaad zo is.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+1+1)} && k+1 \text{ afsplitsen} \\
&= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+1+1)} && \text{volgens de IH} \\
&= \frac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} && \text{noemers gelijk maken} \\
&= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{(k+1)(k+1)}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{(k+1)}{(k+2)} \\
&= \frac{k+1}{k+1+1}
\end{aligned}$$

Omdat k willekeurig was gekozen, geldt voor alle $n \geq 1$ dat $P(n) \rightarrow P(n+1)$.

Volgens het principe van inductie geldt nu $P(n)$ voor alle $n \geq 1$. QED

Nakijkcommentaar: Deze opgave is aardig gemaakt, ongeveer 50% van de punten is hier verdiend. Een aantal keer werden i, n en k en deze variabelen $+1$ door elkaar gehaald. Ook zag ik best wat mensen die met breuken in de weer waren, er niet uitkwamen, en dan maar in één keer de laatste stap naar het eindresultaat $\frac{k+1}{k+2}$ zetten, omdat ze wisten dat dat was waar ze uit moesten komen.

5. **Fitch (voor zowel IN1305-A als TI1300)**

   (a) (6 punten) Bewijs in het **niet-uitgebreide** systeem $\mathcal{F}$ voor natuurlijke deductie volgens Fitch de volgende stelling.
   Stelling. $A \vee B, \neg A \vee C \vdash B \vee C$.

Antwoord:

1	$A \vee B$	hypothese 1
2	$\neg A \vee C$	hypothese 2
3	$\neg A$	hypothese 3
4	$A \vee B$	rei, 1
5	A	hypothese 4
6	$\neg B$	hypothese 5
7	A	rei, 5
8	$\neg A$	rei, 3
9	$\neg\neg B$	$\neg$-intro, 6, 7, 8
10	B	$\neg$-elim, 9
11	B	hypothese 6
12	B	rei, 11
13	B	$\vee$-elim, 4, 10, 12
14	$B \vee C$	$\vee$-intro, 13
15	C	hypothese 7
16	$B \vee C$	$\vee$-intro, 15
17	$B \vee C$	$\vee$-elim, 2, 14, 16

Nakijkcommentaar: Dramatisch, maar niet zo slecht als de meta-beweringen. Hier zijn door de TI1300 student overigens weer beduidend meer punten mee verdiend dan door de IN1305 student. De fout die ik hier het vaakst heb gezien, is dat uit $A \vee B$ en $\neg A$ in één stap (verantwoord met $\vee$-elim!) B werd geconcludeerd. Dat is niet de juiste toepassing van de Fitch regel $\vee$-elim. Die houdt namelijk in dat je een **gevalsonderscheid** maakt. Als ik je een disjunctie als premisse geef, moet je een gevalsonderscheid maken, en als ik je twee disjuncties geef, moet je 2 keer een gevalsonderscheid maken (zie de uitwerking hierboven). Er waren veel (te) korte afleidingen. Wat ik ook een aantal keer heb gezien is dat $A \vee \neg A$ vanuit het niets tevoorschijn werd getoverd, en daarna bij A samen met $\neg A \vee C$ werd geconcludeerd dat C waar is, en bij $\neg A$ samen met $A \vee B$ tot B werd overgegaan. Dus is $B \vee C$ waar. Op zich kan dit wel, behalve dat je in Fitch geen resolutieregel mag toepassen, maar dan moet je wel eerst $A \vee \neg A$ afleiden. (Dat is een tautologie, dus dat kun je op elk punt in je afleiding doen.) Nogmaals, als je disjuncties als premissen gegeven krijgt, moet je een gevalonderscheid maken.

6. **Resolutie (alléén voor TI1300)**

(a) (1 punt) Breng de volgende formule in prenexnormaalvorm: $\forall x(\forall y P(x,y) \to \forall y \neg \forall z Q(y,z))$.

Antwoord:

$$
\begin{aligned}
& \forall x(\forall y P(x,y) \to \forall y \neg \forall z Q(y,z)) \\
\equiv\ & \forall x(\neg \forall y P(x,y) \vee \forall y \neg \forall z Q(y,z)) \\
\equiv\ & \forall x(\exists y \neg P(x,y) \vee \forall y \neg \forall z Q(y,z)) \\
\equiv\ & \forall x(\exists y \neg P(x,y) \vee \forall y \exists z \neg Q(y,z)) \\
\equiv\ & \forall x(\exists w \neg P(x,w) \vee \forall y \exists z \neg Q(y,z)) \\
\equiv\ & \forall x \exists w(\neg P(x,w) \vee \forall y \exists z \neg Q(y,z)) \\
\equiv\ & \forall x \exists w \forall y(\neg P(x,w) \vee \exists z \neg Q(y,z)) \\
\equiv\ & \forall x \exists w \forall y \exists z(\neg P(x,w) \vee \neg Q(y,z))
\end{aligned}
$$

Nakijkcommentaar: Wat hier vaak fout ging was dat mensen niet eerst de $\rightarrow$ wegwerkten, maar wel de $\forall y$ naar links brachten. Als je $\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$ hebt, mag je niet zeggen $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, check zelf maar met de boommethode dat dit niet logisch volgt. Dat mag alleen met $\wedge$ en $\vee$ (zie dictaat *Logica*, p. 153): wel waar is namelijk $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \models \forall x(A(x) \vee B(x))$ en ook $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \models \forall x(A(x) \wedge B(x))$.

(b) (1 punt) Breng het resultaat van opdracht a in Skolemnormaalvorm.

Antwoord:

$$\forall x \exists w \forall y \exists z(\neg P(x, w) \vee \neg Q(y, z))$$
$$\forall x \forall y \exists z(\neg P(x, f(x)) \vee \neg Q(y, z))$$
$$\forall x \forall y(\neg P(x, f(x)) \vee \neg Q(y, g(x, y)))$$

Nakijkcommentaar: Dit ging wel aardig. Soms werd hier een equivalentieteken $\equiv$ tussen de formules geplaatst, maar dat is strikt genomen niet correct (hoewel ik het ook niet fout heb gerekend). Formules in Skolemnormaalvorm zijn niet equivalent met—en hebben dus niet in alle omstandigheden dezelfde waarde als—de formules met existentiële kwantoren waarvan ze de Skolemnormaalvorm zijn, maar ze zijn wel *equivervulbaar* met die formules, wat wil zeggen dat ze in dezelfde gevallen een model hebben. Soms zie je hiervoor de notatie $F \equiv_s G$, waar de s voor 'satisfiable' staat. Waar ik wel op heb gelet is of elk voorkomen van een existentieel gekwantificeerde variabele werd vervangen door een functie van *alle* universeel gekwantificeerde variabelen die er in de prenex vóór stonden. Als je dus $\forall x \exists y \forall z \exists w M$ in Skolemnormaalvorm wil brengen, moet je in M alle voorkomens van y vervangen door $f(x)$ en alle voorkomens van w door $g(x, z)$.

(c) (4 punten) Bewijs met resolutie de volgende stelling:
Stelling. $\forall x \exists y R(x, y), \forall x \forall y(R(x, y) \rightarrow S(x, y)) \vdash \forall x \exists y S(x, y)$.

Antwoord:

premisse 1	$\forall x \exists y R(x, y)$	in prenex NV
	$\forall x R(x, f(x))$	in Skolem NV
premisse 2	$\forall x \forall y(R(x, y) \rightarrow S(x, y))$	
$\equiv$	$\forall x \forall y(\neg R(x, y) \vee S(x, y))$	in prenex en Skolem NV
$\neg$-conclusie	$\neg \forall x \exists y S(x, y)$	
$\equiv$	$\exists x \neg \exists y S(x, y)$	
$\equiv$	$\exists x \forall y \neg S(x, y)$	in prenex NV
	$\forall y \neg S(a, y)$	in Skolem NV

We onderzoeken de vervulbaarheid van $F = \{R(x, f(x)), \neg R(w, y) \vee S(w, y), \neg S(a, z)\}$.

1	$R(x, f(x))$	element F
2	$\neg R(w, y) \vee S(w, y)$	element F
3	$\neg S(a, z)$	element F
4	$S(x, f(x))$	resolvent 1, 2 (mgu: $[w := x, y := f(x)]$)
5	$\square$	resolvent 3, 4 (mgu: $[x := a, z := f(x)]$)

Nakijkcommentaar: Velen gebruikten hier regels van de boommethode (zoals men bij Fitch de resolutieregel gebruikte—nu nog Fitch-regels in de boommethode gebruiken en de kring is rond!).

Einde tentamenopgaven