Schriftelijke zitting Systeem- en regeltechniek 2 (WB2207)

2 november 2007 van 14:00 tot 17:00 uur

Onderstaande aanwijzingen nauwkeurig lezen.

- Vul op het voorblad uw naam, voorletters, studienummer en opleiding in.
- Dit tentamen bestaat uit 5 vraagstukken. Lees iedere vraag goed alvorens te antwoorden.
- Bij elke vraag staat het maximaal te behalen aantal punten aangegeven (totaal = 200).
- Het is **niet** toegestaan om boeken en oude tentamens te gebruiken. Het gebruik van uw eigen *handgeschreven* notes en college sheets is wel toegestaan.
- Het antwoord van elk vraagstuk dient in het bijbehorende kader te worden ingevuld. Bij de beoordeling van het werk telt de uitkomst van een opgave slechts mee wanneer deze is voorzien van een motivering die tot de uitkomst heeft geleid.
- Praat nooit met uw buurman om welke reden dan ook: het tentamen wordt in dit geval meteen ingenomen.
- Tip: begin met vragen waar u snel de oplossing van kunt vinden.
- Veel succes!

Achternaam:

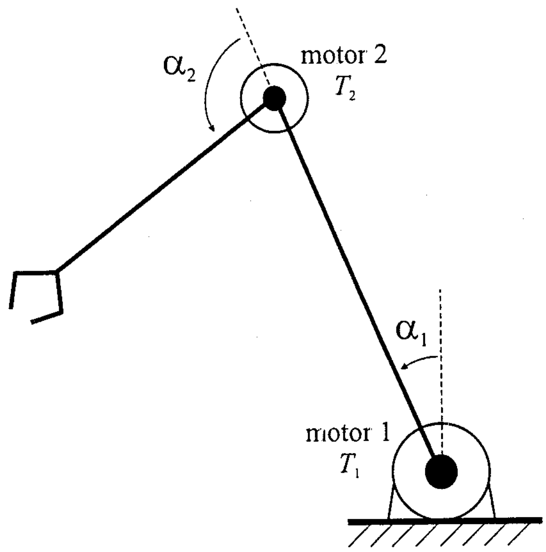
Voorletters:

Studienummer:

Opleiding:

Delft University of Technology, Delft Center for Systems and Control, Mekelweg 2, Delft

1. Gegeven is een planaire robot met twee graden van vrijheid – de hoeken α_1 en α_2 – aangedreven met twee motoren, zoals schematisch weergegeven in figuur 1.



Figuur 1: Een schema van het te regelen robot.

Dit systeem kan beschreven worden met de volgende gelineariseerde differentiaal vergelijkingen (de wrijving wordt verwaarloosd):

$$m_1\ddot{\alpha}_1(t) + m_c\ddot{\alpha}_2(t) = T_1(t) \qquad (1)$$
$$m_c\ddot{\alpha}_1(t) + m_2\ddot{\alpha}_2(t) = T_2(t) \qquad (2)$$

T_1 en T_2 zijn de koppels geleverd door de motoren (inputs van het systeem) en $m_1, m_2, m_c \in \mathbb{R}^+$ zijn bekende constanten.

a) Motor 1 wordt geregeld door middel van een PD regelaar:

$$T_1(t) = -K_p\alpha_1(t) - K_d\dot{\alpha}_1(t)$$

Toon aan dat de overdracht functie van hoek α_2 naar hoek α_1 gelijk is aan:

$$G_\alpha(s) = \frac{\alpha_1(s)}{\alpha_2(s)} = \frac{-m_c s^2}{m_1 s^2 + K_d s + K_p}$$

(12 p)

Berekening / motivering:

$$m_1 \ddot{\alpha}_1 + m_c \ddot{\alpha}_2 = T_1 = -K_p \alpha_1 - K_d \dot{\alpha}_1$$

$$m_1 \ddot{\alpha}_1 + K_d \dot{\alpha}_1 + K_p \alpha_1 = -m_c \ddot{\alpha}_2$$

$$(m_1 s^2 + K_d s + K_p)\, \alpha_1(s) = -m_c s^2 \alpha_2$$

$$G_\alpha(s) = \frac{\alpha_1(s)}{\alpha_2(s)} = \frac{-m_c s^2}{m_1 s^2 + K_d s + K_p}$$

b) Neem dezelfde PD regelaar: $T_1(t) = -K_p\alpha_1(t) - K_d\dot{\alpha}_1(t)$ met $K_p = m_1$ en $K_d = 0.5K_p$. Bereken de natuurlijke frequentie ω_n en de damping ratio ζ van G_α. Leg uit waarom dit systeem stabiel is. **(12 p)**

$\omega_n = 1 \text{ rad s}^{-1}$

$\zeta = 0.25$

Het systeem is stabiel, omdat: $\mathrm{Re}(s_{1,2}) = -\frac{1}{4}$

$\mathrm{Re}(s_{1,2}) < 0$

Berekening / motivering:

$m_1 s^2 + K_d s + K_p = 0$ (noemer van $G_\alpha(s)$)

$K_p = m_1$

$K_d = m_1 / 2$

$$m_1 s^2 + \frac{m_1}{2} s + m_1 = 0$$

$$s^2 + 0.5 s + 1 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - 1}$$

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_n^2 = 1 \;,\; 2\zeta = 0.5 \Rightarrow \zeta = 0.25$$

c) Bereken de *steady-state* waarde α_{1ss} voor $\alpha_2(t) = 3t$ (dwz een *ramp*, met het Laplace beeld: $\alpha_2(s) = 3/s^2$). NB: de *steady-state* waarde is gedefinieerd als $\alpha_{1ss} = \lim_{t\to\infty} \alpha_1(t)$. **(12 p)**

$\alpha_{1ss} = 0$

Berekening / motivering:

$$\alpha_{1ss} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{-m_c s^2}{m_1 s^2 + K_d s + K_p} \cdot \frac{3}{s^2} = 0$$

d) Definieer de toestandsvector als $x = (\alpha_1, \ \alpha_2, \ \dot{\alpha}_1, \ \dot{\alpha}_2)^T$, de output vector als $y = (\alpha_1, \ \alpha_2)^T$ en de input vector als $u = (T_1, \ T_2)^T$. Schrijf het open-loop systeem (1)–(2) (zonder de PD regelaar) in toestandsvorm. **(16 p)**

Geef de matrices A, B, C, D:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ m_2 & -m_c \\ -m_c & m_1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{m_1 m_2 - m_c^2}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = 0$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{\alpha}_1 \\ \ddot{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} m_1 & m_c \\ m_c & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\alpha}_1 \\ \ddot{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$$

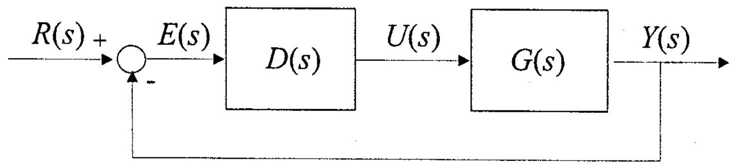
$$\begin{pmatrix} \ddot{\alpha}_1 \\ \ddot{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 & m_c \\ m_c & m_2 \end{pmatrix}^{-1}}_{M^{-1}} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{m_1 m_2 - m_c^2} \begin{pmatrix} m_2 & -m_c \\ -m_c & m_1 \end{pmatrix}$$

2. Een proces wordt beschreven met de volgende overdracht functie:

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+s+5}$$

en geregeld met een proportionele regelaar $D(s) = K$, zoals weergegeven in figuur 2.



Figuur 2: Blok-schema van de gesloten lus.

a) Bepaal de polen, de nulpunten en de DC-gain van het open-lus systeem $G(s)$. Wat is het type van dit systeem? Geef de *steady-state* regelfout e_{ss} als functie van K voor $r(t) = 1, \forall t > 0$. **(16 p)**

polen $= -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{19}\, j$

nulpunten $= -2$

DC gain $= \frac{2}{5}$

systeem type $= 0$

$e_{ss} = \frac{5}{5+2K}$

Berekening / motivering: polen: $s^2 + s + 5 = 0$

nulpunten: $s+2=0$

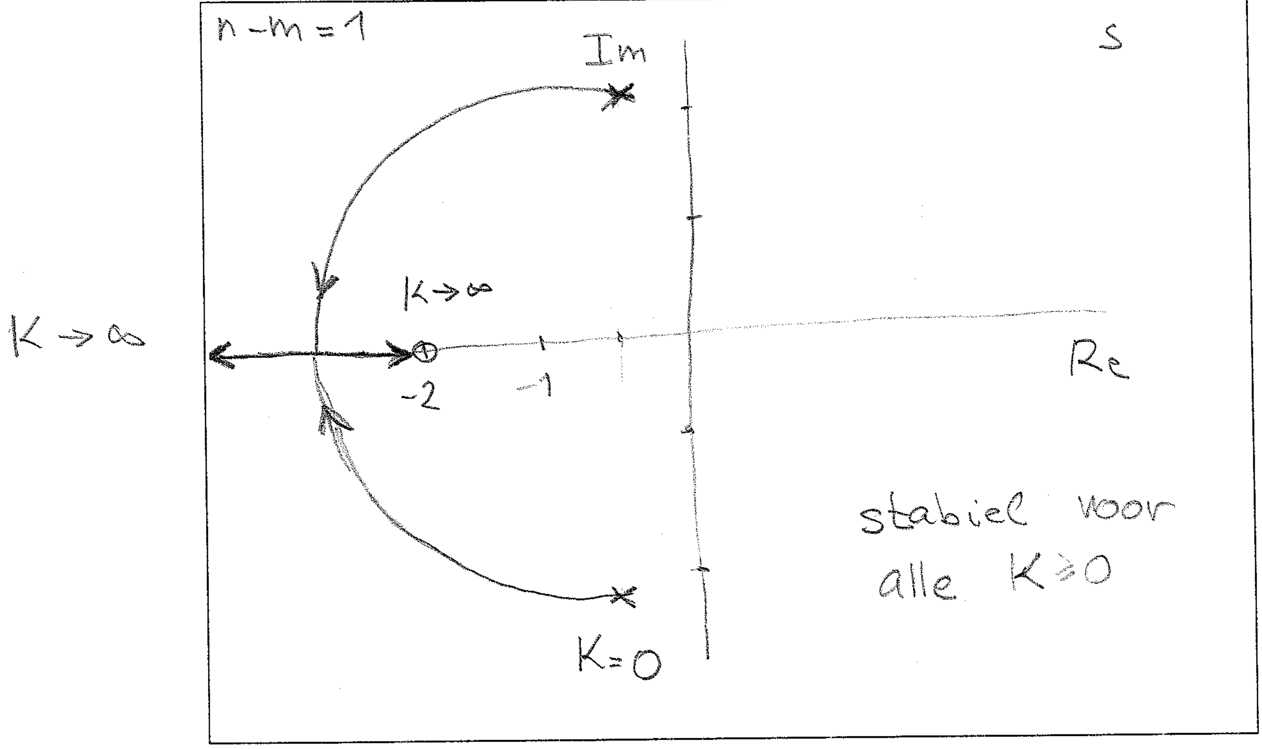
$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-20}$

DC: systeem stabiel, dus $G(0) = \frac{2}{5}$

Systeem type: geen pure integrator $\Rightarrow$ 0

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{K(s+2)}{s^2+s+5}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \frac{2K}{5}} = \frac{5}{5+2K}$$

b) Schets de *root locus* van dit systeem voor $K \geq 0$ en geef aan waar de gesloten-lus polen liggen voor $K = 0$ en waar ze naar toe gaan voor $K \to \infty$. Bespreek hoe de stabiliteit van het gesloten-lus systeem wordt beïnvloed door K. **(12 p)**



stabiel voor alle $K \geq 0$

c) Neem $K = 10$. Bereken de overdracht functies $G_y(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ en $G_u(s) = \frac{U(s)}{R(s)}$. **(16 p)**

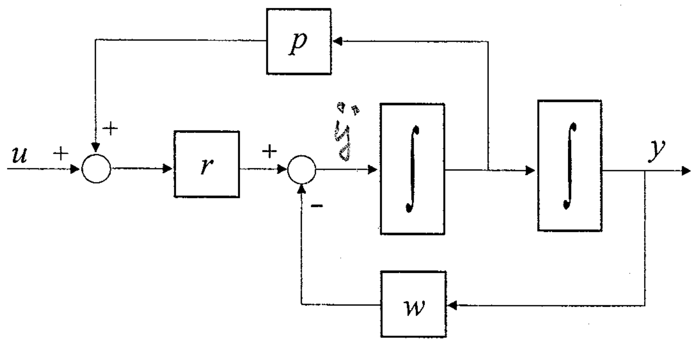
$$G_y(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10s+20}{s^2+11s+25} \qquad G_u(s) = \frac{U(s)}{R(s)} = \frac{10s^2+10s+50}{s^2+11s+25}$$

Berekening / motivering:

$$G_y(s) = \frac{D(s)\,G(s)}{1+D(s)\,G(s)} = \frac{\frac{K(s+2)}{s^2+s+5}}{1+\frac{K(s+2)}{s^2+s+5}} = \frac{K(s+2)}{s^2+s+5+K(s+2)} = \frac{10s+20}{s^2+11s+25}$$

$$G_u(s) = \frac{D(s)}{1+D(s)\,G(s)} = \frac{K}{1+\frac{K(s+2)}{s^2+s+5}} = \frac{K(s^2+s+5)}{s^2+s+5+K(s+2)} = \frac{10s^2+10s+50}{s^2+11s+25}$$

3. Een tweede-orde systeem is weergegeven met het blok diagram van figuur 3.



Figuur 3: Blok schema van een tweede-orde systeem.

a) Geef de bijbehorende differentiaalvergelijking en overdracht functie. **(10 p)**

Differentiaal vergelijking: $\ddot{y} - rp\dot{y} + wy = ru$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{r}{s^2 - rps + w}$$

Berekening / motivering:

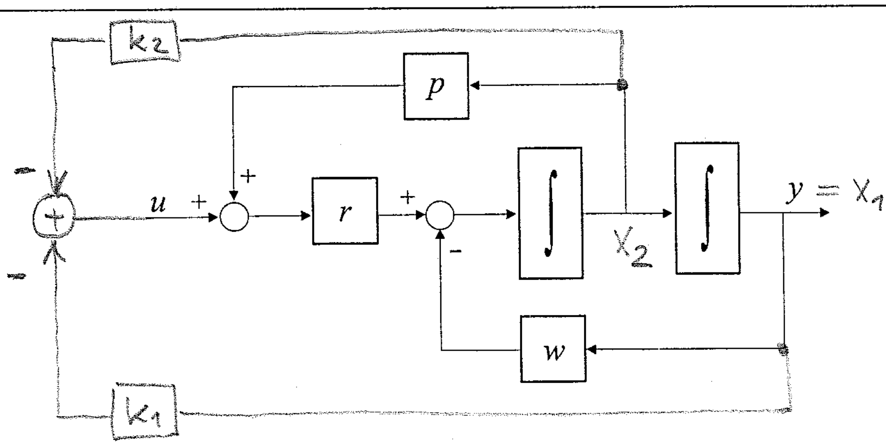
$$\ddot{y} = -wy + r(u + p\dot{y})$$

$$\ddot{y} - rp\dot{y} + wy = ru$$

$$s^2 Y(s) - rps\,Y(s) + w\,Y(s) = r\,U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{r}{s^2 - rps + w}$$

b) Teken een *state-feedback* regelaar $u(t) = -Kx(t)$ met $x(t) = [x_1(t),\, x_2(t)]^T$ en $K = [k_1, k_2]$ in het onderstaande blokschema. Geef duidelijk aan hoe de toestanden x_1 en x_2 gekozen zijn. **(6 p)**



toestand: $X_1 = y$, $X_2 = \dot{X}_1 = \dot{y}$

c) De *state-feedback gain* regelaar $u(t) = -Kx(t)$ wordt nu ontworpen voor dit systeem. Deze regelaar plaatst de gesloten-lus polen op de locatie $-2 \pm j$. Bepaal de waarde van de vector K. Neem de waarden $r = 1, p = 2$ en $w = 3$. **(16 p)**

$K = (2, 6)$

Berekening / motivering:

Char. eq.:

$1 + G(s)\,C(s) = 0$

$C(s)$: $u = +k_1 X_1 + k_2 X_2$

$= k_1 y + k_2 \dot{y}$

$U(s) = (k_1 + k_2 s)\,Y(s)$

$$1 + \frac{k_1 + k_2 s}{s^2 - 2s + 3} = 0$$

$s^2 - 2s + 3 + k_1 + k_2 s = 0$

$s^2 + (k_2 - 2)s + k_1 + 3 = 0$

gewenste char. eq.:

$(s - s_1)(s - s_2) = 0$

$(s + 2 + j)(s + 2 - j) = 0$

$(s+2)^2 + 1 = 0$

$s^2 + 4s + 5 = 0$

$s^2 + 4s + 5 = 0$

$\Downarrow$

$$\left.\begin{array}{l} k_2 - 2 = 4 \\ k_1 + 3 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow k_1 = 2,\ k_2 = 6$$

4. Gegeven is de volgende overdracht functie:

$$G(s) = 50 \cdot \frac{s^2 + 22s + 40}{s^2 + 200.1s + 20}$$

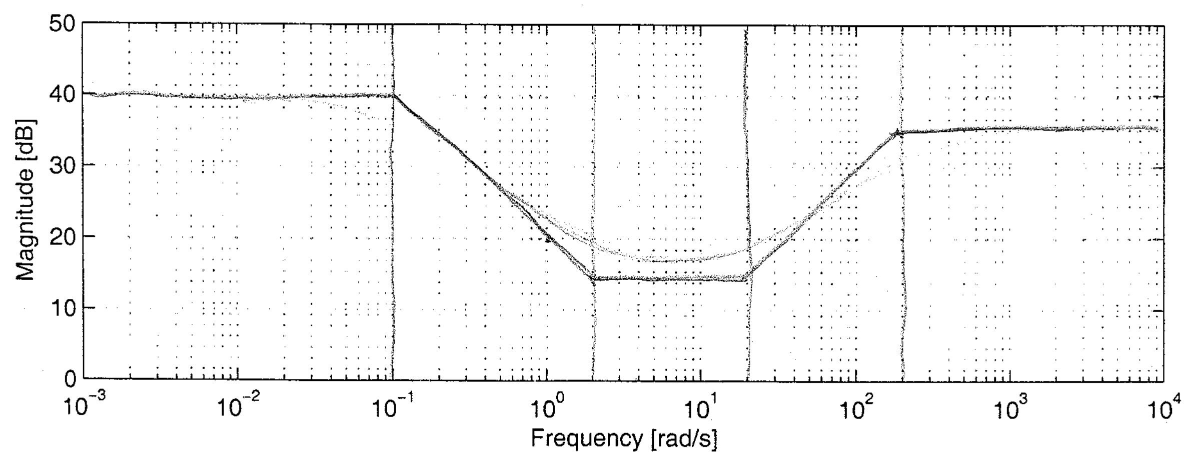
Teken de Bode-plot van $G(s)$. Splits eerst de overdracht functie uit in eerste orde termen en/of tweede orde termen van complexe polen-paren. Bereken dan de frequenties van de kantelpunten (*breakpoints*) en de stationaire versterking (*DC gain*). Teken vervolgens nauwkeurig de asymptoten voor zowel de magnitude als de fase plot en schets tot slot de werkelijke vorm van de grafiek. **(26 p)**

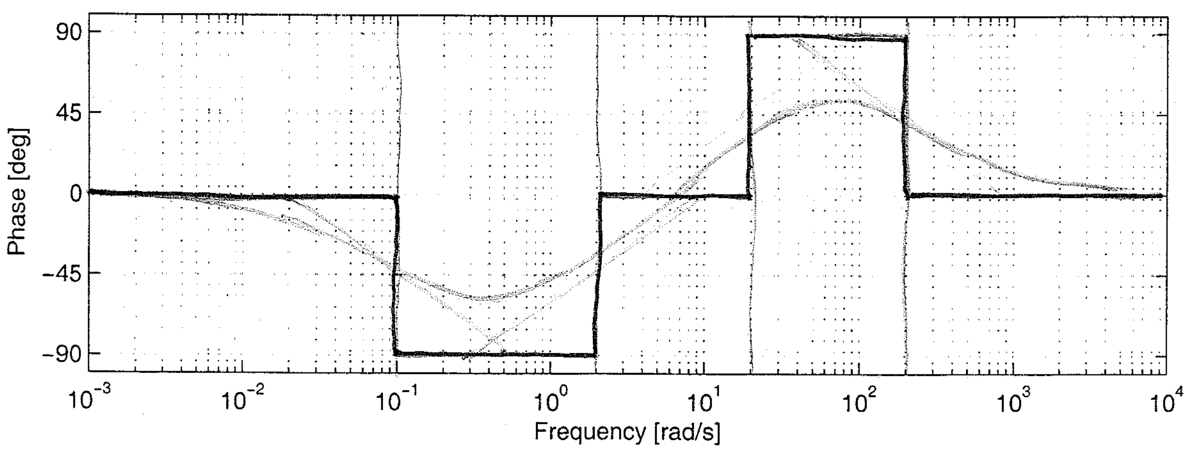
Gefactoriseerde $G(s)$: $50 \dfrac{(s+2)(s+20)}{(s+200)(s+0.1)} = 100 \dfrac{(s/2+1)(s/20+1)}{(s/200+1)(s/0.1+1)}$

Frequenties van de kantelpunten:

0.1 (pool) 2 (nulpunt), 20 (nulpunt), 200 (pool)

Stationaire versterking: 100 (40 dB)

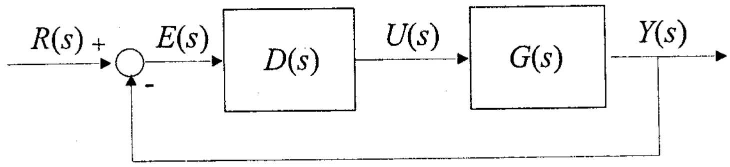




5. Gegeven is het volgende open-loop systeem:

$$G(s) = \frac{1}{(s+3)(s^2+4s+4)}$$

Voor dit systeem wordt een PD regelaar $D(s) = K_p(1+T_d s)$ ontworpen in de gesloten-lus configuratie zoals aangegeven in figuur 4.



Figuur 4: Blok-schema van de gesloten lus.

a) Ontwerp de regelaar $D(s)$ zodat het geregelde systeem aan deze eisen voldoet:

- een cross-over frequentie van $\omega_c = 4\text{rad/s}$
- een fase margin van PM $= 45°$

Laat alle stappen uit je berekening zien. **(26 p)**

$$K_p = \frac{100}{\sqrt{2}} \approx 70.71$$

$$T_d = \frac{1}{4}$$

Berekening / motivering: $G(s) = \dfrac{1}{s^3+4s^2+4s+3s^2+12s+12}$

$$= \frac{1}{s^3+7s^2+16s+12}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{-j\omega^3 - 7\omega^2 + 16j\omega + 12} = \frac{1}{(16\omega-\omega^3)j+12-7\omega^2}$$

$$G(j\omega_c) = \frac{1}{(64-64)j+12-112} = \frac{1}{-100} \Rightarrow \angle G = -180^\circ$$

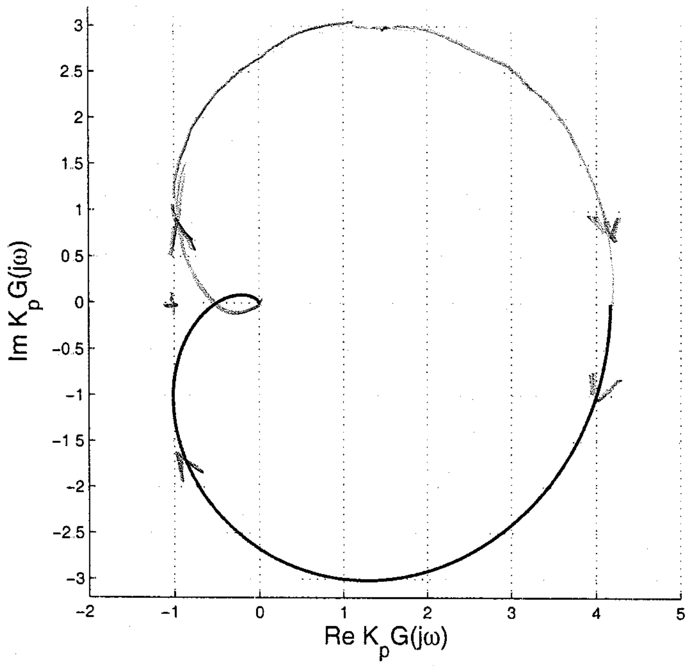
$$|G| = 0.01$$

$$\angle(1+T_d j\omega_c) = 45^\circ \Rightarrow T_d = \tan 45^\circ / \omega_c = \frac{1}{4}$$

$$|1+T_d j\omega_c| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$K_p \cdot 0.01 \cdot \sqrt{2} = 1 \Rightarrow K_p = \frac{100}{\sqrt{2}}$$

b) Hieronder is een Nyquist-plot weergegeven van $K_pG(s)$ met $K_p = 50$ voor positieve ω. Maak de Nyquist-plot compleet voor alle waarden van $\omega \in (-\infty, \infty)$. Geef de richting van stijgende ω aan. Pas het Nyquist criterium toe ($Z = N + P$). Is het gesloten-lus systeem stabiel? **(10 p)**



$Z =$ 0

$P =$ 0

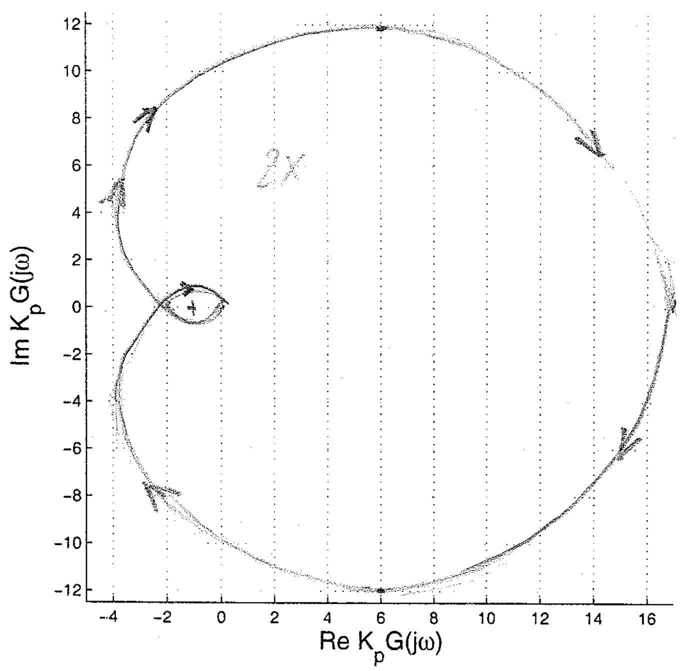
$N =$ 0

Stabiel?

Ja (Z = 0)

c) Schets de Nyquist-plot van $K_pG(s)$ met $K_p = 200$ voor alle waarden van $\omega \in (-\infty, \infty)$. Pas het Nyquist criterium toe. Is het gesloten-lus systeem stabiel? **(10 p)**

→ 4 x groter dan voor K_p = 50



$Z =$ 2

$P =$ 0

$N =$ 2

Stabiel?

Nee (Z = 2
⇒ 2 instabiele gesloten-lus polen)

——————— Einde tentamen ———————

vraagstuk	1 a	1 b	1 c	1 d	2 a	2 b	2 c	3 a	3 b	3 c	4	5 a	5 b	5 c
score														