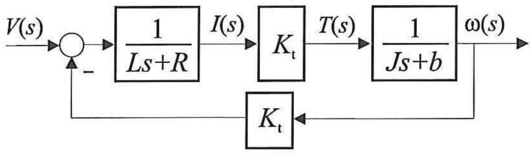
1. Een blok-schema van een DC motor is gegeven in figuur 1.



Figuur 1: Blok-schema van een DC motor.

a) Geef de overdrachtsfuntie $G(s) = T(s)/V(s)$. Schrijf $G(s)$ in de vorm $K\dfrac{B(s)}{A(s)}$, met K een constante en $A(s)$, $B(s)$ polynomen in aflopende machten van s. **(12 p)**

$$G(s) = \frac{T(s)}{V(s)} = \frac{K_t\,(Js+b)}{LJs^2 + (RJ+Lb)s + Rb + K_t^2}$$

Berekening / motivering:

$$\frac{T(s)}{V(s)} = G(s) = \frac{\dfrac{K_t}{Ls+R}}{1 + \dfrac{K_t^2}{(Ls+R)(Js+b)}} =$$

$$= \frac{K_t\,(Js+b)}{LJs^2 + (RJ+Lb)s + Rb + K_t^2}$$

b) Stel nu dat de input van de motor kortgesloten is, dwz $V(s) = 0$. Geef de overdrachtsfuntie $H(s)$ van een extern koppel $T_e(s)$ naar de stroom $I(s)$. Het externe koppel $T_e(s)$ wordt opgeteld bij $T(s)$. **(12 p)**

$$H(s) = \frac{I(s)}{T_e(s)} = \frac{-K_t}{LJs^2 + (RJ+Lb)s + Rb + K_t^2}$$

Berekening / motivering:

$$\frac{I(s)}{Te(s)} = H(s) = \frac{\dfrac{-K_t}{(Ls+R)(Js+b)}}{1 + \dfrac{K_t^2}{(Ls+R)(Js+b)}} =$$

$$= \frac{-K_t}{LJs^2 + (RJ+Lb)s + R_b + K_t^2}$$

2. Gegeven is het volgende open-lus systeem:

$$G(s) = \frac{80}{(s+2)(s+3)^2}$$

Ontwerp een PD regelaar $D(s) = K_p(1 + T_d s)$ zodat het geregelde systeem aan de volgende eisen voldoet:

- een cross-over frequentie van $\omega_c = 3$ rad/s
- een fase marge van PM = 65°

Laat alle stappen uit uw berekening zien. **(30 p)**

K_p = 0.6932

T_d = 0.2027

Berekening / motivering:

$$G(j\omega_c) = \frac{80}{(3j+2)(3j+3)^2} = \frac{80}{(3j+2)(-9+18j+9)}$$

$$\angle G(j\omega_c) = 0 - \tan^{-1}\frac{3}{2} - 90° = -146{,}3°$$

$$PM = -143{,}6° + 180° = 33{,}7°$$

$$PM_{gewenst} = 65°$$

$$\angle(1 + T_d \cdot 3j) = 65° - 33{,}7° = 31{,}3°$$

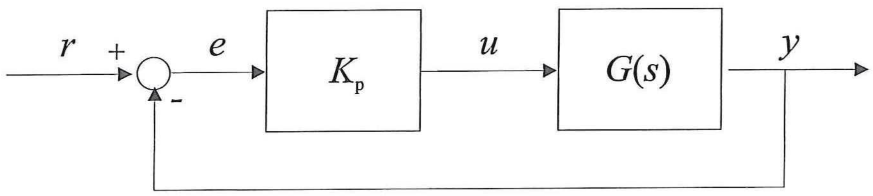
$$T_d = \frac{\tan 31{,}3°}{3} = 0.2027$$

$$|G(j\omega_c)| \cdot |1 + T_d j\omega_c| \cdot K_p = 1$$

$$K_p = \frac{1}{\left|\frac{80}{-54+36j}\right| \cdot |1 + 0.2027 \cdot 3j|} =$$

$$= \frac{1}{1.2327 \cdot 1{,}1704} = 0.6932$$

3. Een lasrobot met overdrachtsfunctie $G(s)$ wordt geregeld door een proportionele regelaar K_p in de gesloten-lus configuratie zoals aangegeven in figuur 2.

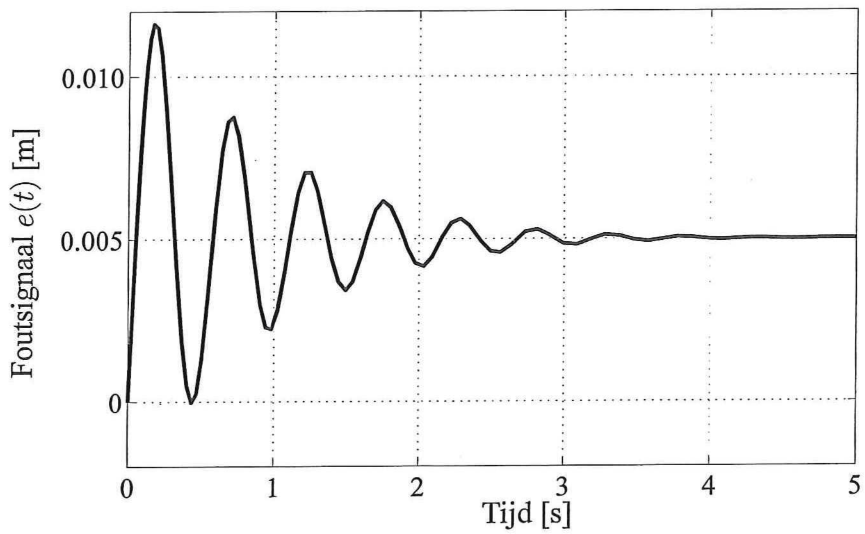


Figuur 2: Blok-schema van de gesloten lus.

De overdrachtsfunctie $G(s)$ heeft de volgende vorm:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+10)(s+20)}$$

waarbij de exacte waarde van de parameter K onbekend is. Om K te bepalen, wordt een gesloten-lus experiment uitgevoerd met de proportionele regelaar $K_p = 1000$ (de gesloten lus is asymptotisch stabiel met deze regelaar). Op de referentie input $r(t)$ wordt een *ramp* signaal $r(t) = 0.1t$ gezet en de bijbehorende output $y(t)$ wordt gemeten. Het foutsignaal $e(t) = r(t) - y(t)$ is weergegeven in figuur 3.



Figuur 3: Gemeten foutsignaal $e(t)$.

a) Bereken de constante K in de overdrachtsfuntie $G(s)$. Tip: maak gebruik van de eindwaardestelling (*final value theorem*). **(18 p)**

K = 4

Berekening / motivering:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1 + \frac{K K_p}{s(s+10)(s+20)}} \cdot \frac{0.1}{s^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s^2 (s+10)(s+20)}{s(s+10)(s+20) + K K_p} \cdot \frac{0.1}{s^2}$$

$$e_{ss} = \frac{20}{K K_p} = 0.005$$

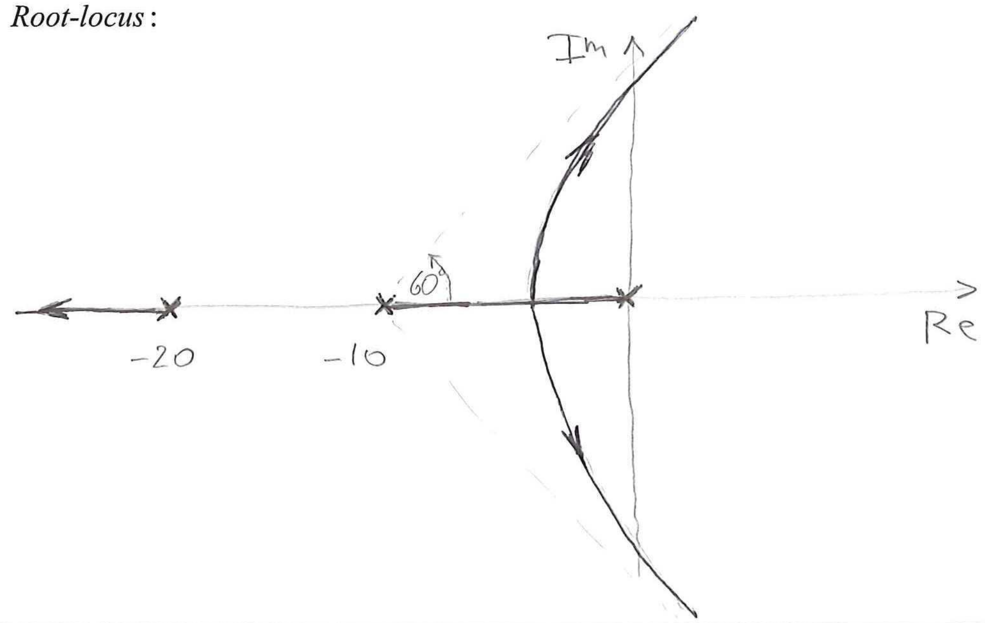
$$K = \frac{20}{0.005\, K_p} = 4$$

b) Gebruik dezelfde proportionele regelaar $K_p = 1000$ en veronderstel dat de constante K in $G(s)$ niet bekend is. Geef de gesloten-lus karakteristieke vergelijking in de root-locus vorm en schets de bijbehorende *root locus* voor $K > 0$. Geef de richting van stijgende K aan. **(12 p)**

Karakteristieke vergelijking:

$$1 + K \frac{1000}{s(s+10)(s+20)} = 0$$

Root-locus :



c) Geef het interval van versterkingen $K > 0$ in $G(s)$ voor welke het gesloten-lus systeem asymptotisch stabiel is. **(20 p)**

$K \in (0, 6)$

Berekening / motivering: $1 + K \dfrac{K_p}{s(s+10)(s+20)} = 0$

$s^3 + 30s^2 + 200s + KK_p = 0$

2 polen op de imaginaire as: $\pm j\omega$

$\Rightarrow s = j\omega$

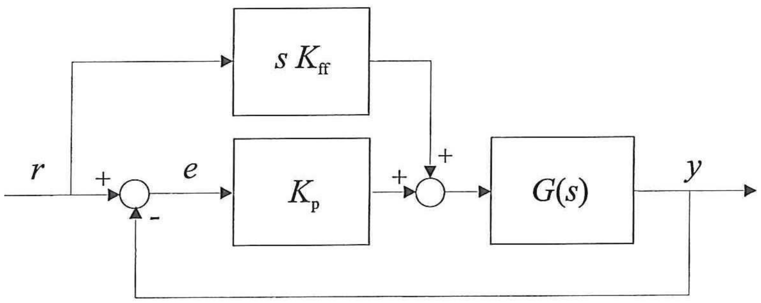
$\underbrace{-j\omega^3 + 200j\omega}_{=0} - 30\omega^2 + 1000 K_{max} = 0$

$\Rightarrow \omega = \begin{cases} 0 \\ \sqrt{200} \end{cases}$

$-30 \cdot 200 = -1000 K_{max}$

$K_{max} = 6$

d) Om de *steady-state* fout te elimineren, wordt het regelschema uitgebreid met de zgn. *velocity feedforward* versterking K_{ff}, zie figuur 4.



Figuur 4: Blok-schema met *velocity feedforward* (s is de Laplace operator).

Neem $K = 2$, $K_p = 1000$ en bereken de waarde van K_{ff} zodanig dat de *steady-state* fout $e_{ss} = 0$ voor de *ramp* referentie input (de *steady-state* waarde is gedefinieerd als $e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t)$). **(18 p)**

$K_{ff} = 100$

Berekening / motivering: $E(s) = \dfrac{1}{1+K_p G(s)} R(s) + \dfrac{-s K_{ff} G(s)}{1+K_p G(s)} R(s)$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \, \frac{1 - s K_{ff} \dfrac{2}{s(s+10)(s+20)}}{1 + \dfrac{2000}{s(s+10)(s+20)}} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{(s+10)(s+20) - 2K_{ff}}{s(s+10)(s+20) + 2000} = \frac{200 - 2K_{ff}}{2000}$$

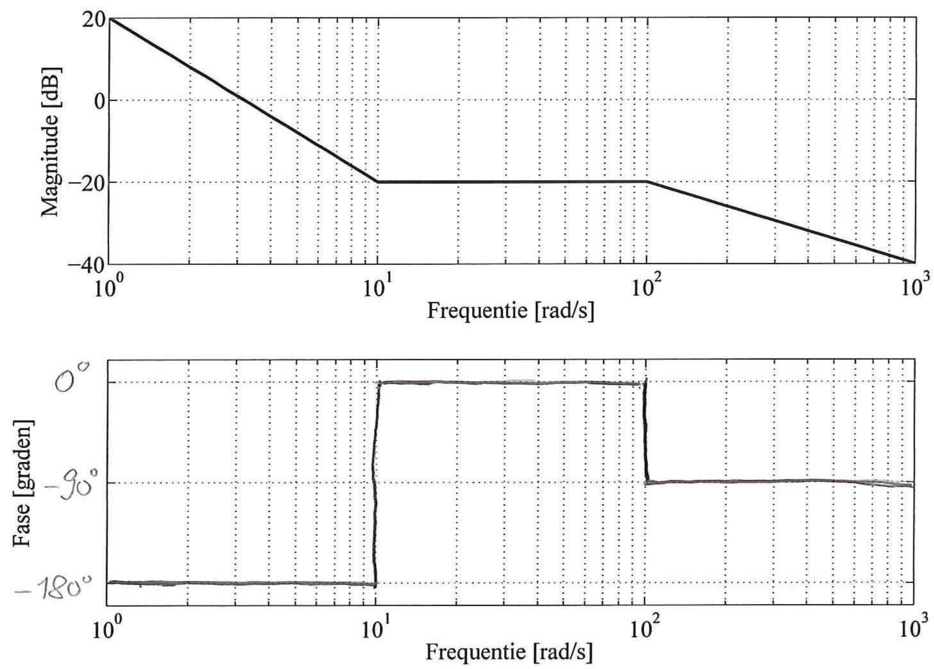
$$e_{ss} = 0 \Rightarrow K_{ff} = 100$$

2de manier: $e_{ss} = 0 \Rightarrow r(t) = y(t)$

$$r(t) = y(t) = \underbrace{\mathrm{dcgain}(G(s)\, s\, K_{ff})}_{} \, r(t)$$

$$= 1 \Rightarrow K_{ff} = \frac{1}{\frac{2}{200}} = 100$$

4. Gegeven is de onderstaande asymptotenbenadering van de magnitude van een Bode diagram:



Figuur 5: Asymptotenbenadering van een Bode diagram.

Dit Bode diagram is getekend voor een stabiel, minimum-fase systeem met de onderstaande overdrachtsfunctie $G(s)$:

$$G(s) = \frac{K(s+a)^m}{s^n(\tau s+1)^p}$$

a) Bepaal de constanten K, m, n, p, a en τ in de overdracht functie $G(s)$: **(20 p)**

$K = 0.1$ $m = 2$ $n = 2$

$p = 1$ $a = 10$ $\tau = \frac{1}{100}$

Berekening / motivering: helling voor $\omega \to 0 = -40$dB/dec
$\Rightarrow n = 2$

Bij $\omega = 10$ rad/s 2x nulpunt $\Rightarrow m = 2,\ a = 10$

Bij $\omega = 100$ rad/s 1x pool $\Rightarrow \tau = \frac{1}{100},\ p = 1$

$$\frac{K(s+10)^2}{s^2(\frac{1}{100}s+1)} = \frac{K\cdot 100(\frac{1}{10}s+1)^2}{s^2(\frac{1}{100}s+1)}$$

$\boxed{20\text{dB bij } \omega=1}$

uit de Bode plot: $K \cdot 100 = 10 \Rightarrow K = 0.1$

b) Bepaal aan de hand van het Bode diagram het systeem type: **(3 p)**

Systeem type: 2

Motivering: helling voor $\omega \to 0$ rad/s
is -40dB/dec

c) Teken in figuur 5 nauwkeurig de asymptoten van de bijbehorende fase plot. Geef de fase in graden langs de verticale as. **(5 p)**

---

5. Gegeven is het volgende model in toestandsvorm:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

a) Toon aan dat voor de open-lus overdrachtsfunctie $G(s) = Y(s)/U(s)$ geldt

$$G(s) = \frac{s+9}{s^2+2s+9}$$

(10 p)

Berekening / motivering:

$$\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+1 & -4 \\ 2 & s+1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{C\,\mathrm{adj}(sI-A)\,B}{\det(A)} = \frac{(2\ \ 1)\begin{pmatrix} s+1 & 4 \\ -2 & s+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{s^2+2s+9}$$

$$= \frac{(2\ \ 1)\begin{pmatrix} 4 \\ s+1 \end{pmatrix}}{s^2+2s+9} = \frac{s+9}{s^2+2s+9}$$

b) Het systeem wordt geregeld door middel van een toestandsregelaar $u(t) = -Kx(t)$ met $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ de state feedback versterking. Bereken K zodanig dat de gesloten-lus karakteristieke polynoom een relatieve demping $\zeta = 0.8$ heeft en een natuurlijke frequentie $\omega_n = 20$ rad/s. **(20 p)**

$K = (90{,}25 \quad 30)$

Berekening / motivering: $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 =$

$= s^2 + 32s + 400 \leftarrow$ gewenste char. polynoom

$$sI - A + BK = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} s+1 & -4 \\ 2+k_1 & s+1+k_2 \end{pmatrix} = (s+1)(s+1+k_2) + 8 + 4k_1$$

$$= s^2 + (2+k_2)s + 9 + k_2 + 4k_1$$

$$2 + k_2 = 32 \Rightarrow k_2 = 30$$

$$39 + 4k_1 = 400 \Rightarrow k_1 = \frac{361}{4} = 90{,}25$$

Einde tentamen