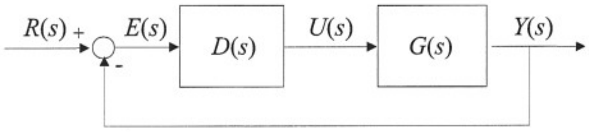
1. **a)** Een systeem $G(s)$ wordt geregeld met een regelaar $D(s)$ in de gesloten-lus configuratie zoals aangegeven in figuur 1.



Figuur 1: Blok-schema van de gesloten lus.

Geef de overdrachtsfunctie $G_{c1}(s) = \dfrac{Y(s)}{R(s)}$, eerst in het algemeen als functie van $G(s)$ en $D(s)$ en dan specifiek voor

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s}, \quad D(s) = 4 + 3s$$

Voor het laatste geval bereken de polen, nulpunten en de stationaire versterking (DC-gain) van het gesloten-lus systeem $G_{c1}(s)$. **(12 p)**

$$G_{c1}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)\,D(s)}{1 + G(s)\,D(s)} \qquad \text{(algemeen)}$$

$$G_{c1}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{3s+4}{s^2+4s+4} \qquad \text{(specifiek)}$$

polen : $-2 \quad (2\times)$

nulpunten : $-\frac{4}{3}$

DC-gain : 1 (systeem is stabiel)

Berekening / motivering:

$$G_{c_1}(s) = \frac{G(s)\,D(s)}{1 + G(s)D(s)} = \frac{\dfrac{4+3s}{s^2+s}}{1 + \dfrac{4+3s}{s^2+s}}$$

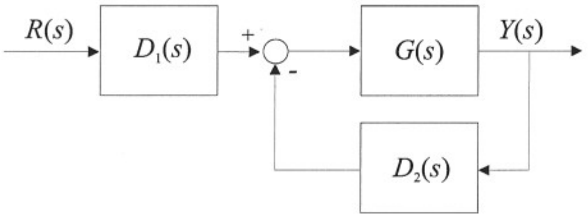
$$= \frac{3s+4}{s^2+4s+4}.$$

polen: $s^2 + 4s + 4 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = -2$

nulpunten: $3s + 4 = 0 \Rightarrow z_1 = -\frac{4}{3}$

systeem stabiel, dus $G_{c_1}(0) = \frac{4}{4} = 1$

b) Het systeem $G(s)$ wordt nu geregeld met de regelaars $D_1(s)$ en $D_2(s)$, in de configuratie aangegeven in figuur 2.



Figuur 2: Blok-schema van de gesloten lus.

Geef de overdrachtsfunctie $G_{c2}(s) = \dfrac{Y(s)}{R(s)}$, eerst in het algemeen als functie van $G(s)$, $D_1(s)$ en $D_2(s)$ en dan specifiek voor

$$G(s) = \frac{1}{s^2+s}, \quad D_1(s) = 3\,, \quad D_2(s) = 4 + 3s$$

Voor het laatste geval bereken de polen, nulpunten en de stationaire versterking (DC-gain) van het gesloten-lus systeem $G_{c2}(s)$. **(10 p)**

$$G_{c2}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)\,D_1(s)}{1 + G(s)\,D_2(s)} \qquad \text{(algemeen)}$$

$$G_{c2}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{3}{s^2+4s+4} \qquad \text{(specifiek)}$$

polen : -2 (2x)

nulpunten : geen

DC-gain : $\frac{3}{4}$

Berekening / motivering:

$$G_{c2}(s) = \frac{G(s)\,D_1(s)}{1+G(s)\,D_2(s)} = \frac{\frac{3}{s^2+s}}{1+\frac{3s+4}{s^2+s}}$$

$$= \frac{3}{s^2+4s+4}$$

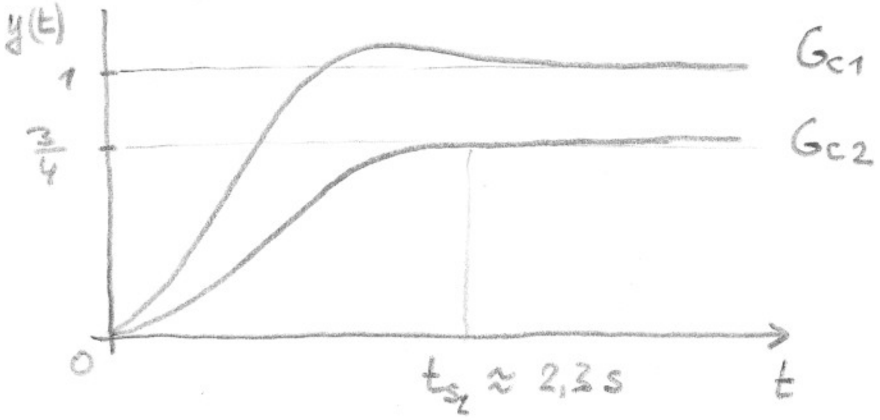
polen : ditto a) , nulpunten : geen

DC : systeem stabiel $\Rightarrow$ $G_{c2}(0) = \frac{3}{4}$

c) Voor de overdrachtsfuncties gegeven in a) en b) schets in één grafiek de stapresponsies van $G_{c1}(s)$ en $G_{c2}(s)$. Geef in de grafiek de numerieke waarden van de *steady-state* output van beide overdrachtsfuncties, de *settling time* van G_{c2} en leg uit hoe de twee stapresponsies van elkaar verschillen in de termen van de *overshoot* en waarom. Label de assen. **(14 p)**

Stapresponsies (schets):

$$t_{s_2} = \frac{4,6}{\xi_2 \omega_{n_2}} = \frac{4,6}{2} = 2,3$$



Overshoot (discussie):

$G_{c1}(s)$ heeft enige overshoot als gevolg van het nulpunt in $-\frac{4}{3}$, ofwel:

$$G_{c1}(s) = \frac{4}{s^2+4s+4} + s\,\frac{3}{s^2+4s+4}$$

$G_{c2}(s)$ heeft geen overshoot ($\xi_2 = 1$).

d) Neem de gesloten-lus configuratie volgens figuur 2 met

$$G(s) = \frac{1}{s^2+s}, \quad D_1(s) = K_{\text{ff}}, \quad D_2(s) = K_p + K_d s$$

Bereken de parameters K_{ff}, K_p en K_d zodanig dat de gesloten-lus polen gelijk zijn aan -4 en -10 en de stationaire versterking (DC-gain) van het gesloten-lus systeem gelijk is aan 0.1. **(12 p)**

$K_p =$ 40

$K_d =$ 13

$K_{\text{ff}} =$ 4

Berekening / motivering:

$$G_{c2}(s) = \frac{K_{FF}}{s^2+s+K_D s+K_P} = \frac{K_{FF}}{s^2+(1+K_D)s+K_P}$$

gewenst: $a_{c_2}(s) = (s+4)(s+10) = s^2+14s+40$

$$s^2+(1+K_D)s+K_P = s^2+14s+40$$

$$\Rightarrow \quad K_P = 40, \quad K_d = 13$$

gesloten lus stabiel, dus DC gain:

$$G_{c_2}(0) = \frac{K_{FF}}{K_P} = 0.1$$

$$K_{FF} = 0.1 K_P = 4$$

---

2. Neem de regelkring in figuur 1 met

$$G(s) = \frac{1}{10s+1} \quad \text{en} \quad D(s) = K, \quad \text{met } K \in \mathbb{R}^+$$

a) Geef de magnitude van de gesloten-lus overdrachtsfunctie $G_c(j\omega)$ als functie van K en ω. Bereken vervolgens de magnitude van $G_c(j\omega)$ voor $\omega = 0$. **(10 p)**

$$|G_c(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{100\omega^2+(K+1)^2}}$$

$$|G_c(0)| = \frac{K}{1+K}$$

Berekening / motivering:

$$G_c(j\omega) = \frac{\frac{K}{10j\omega+1}}{1+\frac{K}{10j\omega+1}} = \frac{K}{10j\omega+K+1}$$

$$|G_c(j\omega)| = \frac{|K|}{\sqrt{100\omega^2+(K+1)^2}}$$

b) Bereken K zodanig dat de bandbreedte ω_{BW} van het gesloten-lus systeem gelijk is aan 1.1 rad/s. (Hint: gebruik de definitie van bandbreedte.) **(10 p)**

$K = 10$

Berekening / motivering:

$$|G_c(j\omega_{BW})| = \frac{|G_c(0)|}{\sqrt{2}} \Rightarrow |G_c(j\omega_{BW})|^2 = \frac{|G_c(0)|^2}{2}$$

$$\frac{K^2}{100\omega_{BW}^2 + (K+1)^2} = \frac{K^2}{2(K+1)^2} \Rightarrow K+1 = 10\,\omega_{BW}$$

$$K = 10\,\omega_{BW} - 1 = 10$$

c) Neem $K = 2$. Schrijf eerst de *loop-transfer* overdrachtsfunctie $L(j\omega)$ en bereken vervolgens the *crossover* frequentie ω_c, de fase marge en de gain marge. **(18 p)**

$L(j\omega) = \dfrac{2}{10j\omega + 1}$

$\omega_c = \dfrac{\sqrt{3}}{10}$

fase marge $=$ 120°

gain marge $=$ ∞

Berekening / motivering: $L(j\omega) = K\,G(j\omega) = \dfrac{2}{10j\omega + 1}$

$$\omega_c: \; |L(j\omega_c)| = 1 \Rightarrow |L(j\omega_c)|^2 = 1$$

$$\frac{4}{100\omega_c^2 + 1} = 1 \Rightarrow \omega_c^2 = \frac{3}{100}, \quad \omega_c = \frac{\sqrt{3}}{10}$$

$$PM: \; \angle L(j\omega_c) = 0 - \tan^{-1}\frac{10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{10}}{1}$$

$$= -60^\circ \Rightarrow PM = 120^\circ$$

$GM = \infty$ (1^e-orde systeem)

3. Gegeven is een systeem met de volgende overdrachtsfunctie:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2+1}{s(s^2+3)}$$

a) Geef de bijbehorende differentiaalvergelijking. **(4 p)**

Differentiaal vergelijking: $\dddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) = \ddot{u}(t) + u(t)$

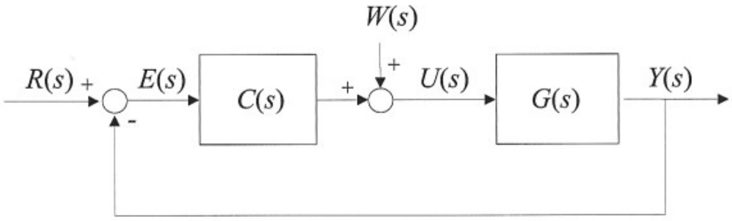
b) Schrijf dit systeem in de *control canonical form.* **(10 p)**

Geef de matrices A_c, B_c, C_c, D_c:

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D_c = 0$$

c) Het systeem $G(s)$ wordt geregeld met een PI regelaar $C(s) = K_p + \dfrac{K_i}{s}$, zoals weergegeven in figuur 3. In dit schema is $W(s)$ een constante verstoring met een onbekende amplitude.



Figuur 3: Gesloten-lus regelschema.

Veronderstel dat $r(t) = 0$ en $w(t) \neq 0$, $\forall t$ en dat de regellus stabiel is. Geef de overdrachtsfunctie $G_w(s)$ van de verstoring $W(s)$ naar de regelfout $E(s)$ en bereken de *steady-state* waarde e_{ss} voor $w(t) = 10$. (De *steady-state* waarde is gedefinieerd als $e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t)$.) **(14 p)**

$$G_w(s) = \frac{E(s)}{W(s)} = \frac{-(s^3+s)}{s^4 + K_p s^3 + (3+K_i) s^2 + K_p s + K_i}$$

$$e_{ss} = 0$$

Berekening / motivering:

$$G_w(s) = \frac{-G(s)}{1+G(s)C(s)} = \frac{-\frac{s^2+1}{s^3+3s}}{1+\frac{(s^2+1)(K_p+\frac{K_i}{s})}{s^3+3s}}$$

$$= \frac{-(s^3+s)}{s^4+K_p s^3+(3+K_i)s^2+K_p s+K_i}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s \, \frac{-(s^3+s)}{s^4+\dots+K_i} \cdot \frac{10}{s} = 0$$

---

4. Gegeven zijn de volgende overdrachtsfuncties van een systeem $G(s)$ en een regelaar $D(s)$:

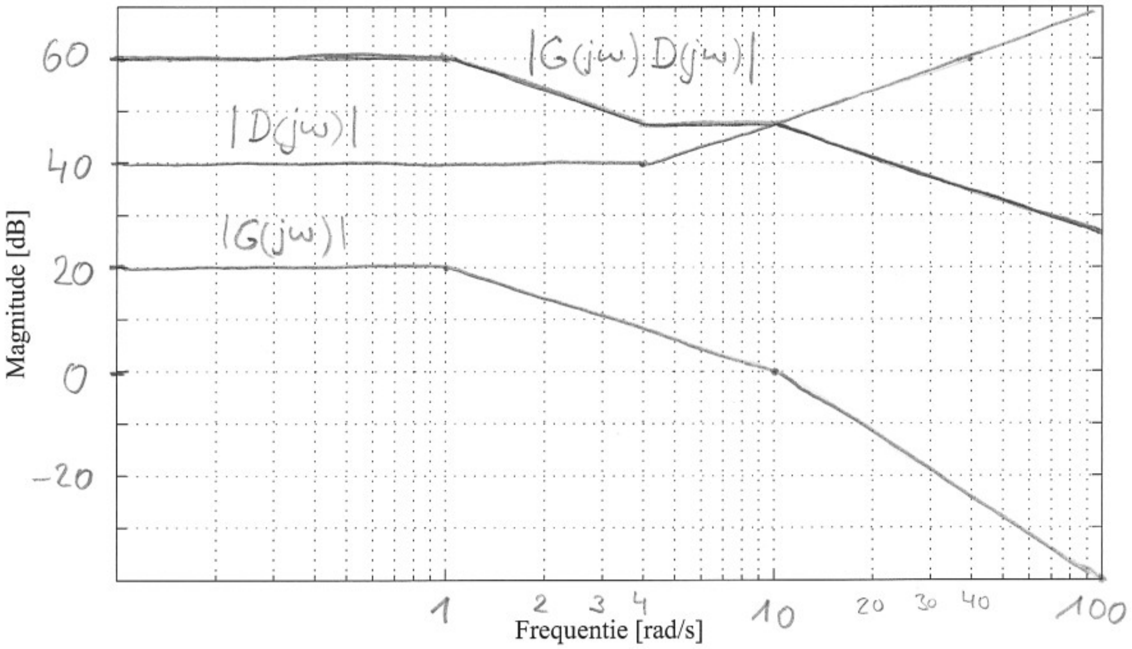
$$G(s) = \frac{100}{(s+1)(s+10)}, \qquad D(s) = 25(s+4)$$

a) Teken in één grafiek de asymptotenbenadering van de Bode diagrammen van het systeem $G(s)$, de regelaar $D(s)$ en de *loop transfer* $G(s)D(s)$. Schrijf de overdrachtsfuncties eerst om in een geschikte vorm en geef de frequenties van de kantelpunten (*breakpoints*). Teken alleen de magnitude plot. Label de assen. **(16 p)**

$$G(j\omega) = \frac{10}{(j\omega+1)(\frac{j\omega}{10}+1)} \qquad D(j\omega) = 100\left(\frac{j\omega}{4}+1\right)$$

Frequenties van de kantelpunten:

$G(j\omega)$: 1 , 10 (polen) $D(j\omega)$: 4 (nulpunt)



b) Wat is het *systeem type* van de *loop transfer* $G(s)D(s)$? Motiveer uw antwoord eerst met behulp van de eindwaardestelling (*final value theorem*) en dan aan de hand van het Bode diagram. **(8 p)**

Berekening / motivering: type m

Mbv de eindwaardestelling:

$$\lim_{s \to 0} s\, G_e(s) \cdot \frac{1}{s^{m+1}} = \lim_{s \to 0} G_e(s) \cdot \frac{1}{s^m}$$

$$G_e(s) = \frac{1}{1 + G(s)\,D(s)} = \frac{1}{1 + \frac{2500\,(s+4)}{s^2 + 11s + 10}}$$

$$G(0) = \frac{10}{10010}$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{10}{10010} \cdot \frac{1}{s^m} = \begin{cases} \frac{10}{10010} & \text{voor } m = 0 \\ \infty & \text{voor } m > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ type 0

Mbv het Bode diagram:

De helling van $|G(j\omega)\,D(j\omega)|$ voor $\omega \to 0$ is 0 dB/dec $\Rightarrow$ type 0 systeem

5. Een systeem is beschreven door een model in de toestandsvorm:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

a) Toon aan dat de overdrachtsfunctie van dit systeem gelijk is aan:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3(s+6)}{(s+3)(s+2)}$$

(20 p)

Berekening / motivering: $G(s) = C\,(sI - A)^{-1} B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+3 & -3 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{(s+3)(s+2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+2 & 3 \\ 0 & s+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{(s+3)(s+2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 3s+9 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{9 + 3s + 9}{(s+3)(s+2)} = \frac{3(s+6)}{(s+3)(s+2)}$$

b) Dit systeem wordt geregeld door middel van een twee-graden-van-vrijheid toestandsregelaar (*two-degree-of-freedom state-feedback controller*) $u(t) = -Kx(t) + K_{ff}r(t)$, met $r(t)$ de referentie voor de uitgang. Bereken de feedback versterkingsvector $K = [k_1 \;\; k_2]$ en de *feedforward* versterking K_{ff} zodanig dat de stationaire versterking (*DC gain*) van $G_{cl}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ gelijk is aan 9 en dat de gesloten-lus karakteristieke polynoom gelijk is aan:

$$d(s) = s^2 + 15s + 50$$

(22 p)

$$K = \begin{pmatrix} \frac{14}{9} & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

$$K_{ff} = 25$$

Berekening / motivering:

$$\det\left(sI - (A - BK)\right) = s^2 + 15s + 50$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3k_1 & -2-3k_2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\det\begin{pmatrix} s+3 & -3 \\ +3k_1 & s+2+3k_2 \end{pmatrix} =$$

$$= s^2 + 2s + 3k_2 s + 3s + 6 + 9k_2 + 9k_1$$

$$= s^2 + (5 + 3k_2)s + 6 + 9k_2 + 9k_1$$

$$5 + 3k_2 = 15 \Rightarrow k_2 = \frac{10}{3}$$

$$6 + 30 + 9k_1 = 50 \Rightarrow k_1 = \frac{14}{9}$$

$$G_{ce}(s) = K_{ff}\,\frac{3(s+6)}{s^2+15s+50}$$

$$K_{ff} \cdot G_{ce}(0) = 9 \Rightarrow K_{ff} = \frac{9}{G_{ce}(0)}$$

$$K_{ff} = \frac{9}{\frac{18}{50}} = 25$$

Einde tentamen