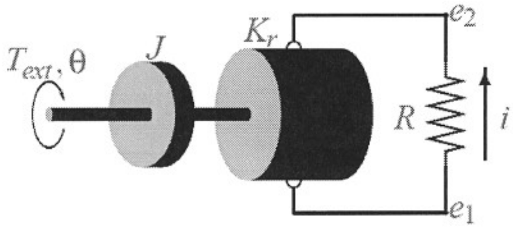
1. Beschouw een elektromechanisch systeem van een generator en een vliegwiel, die worden aangedreven met een extern koppel T_{ext}, zoals schematisch weergegeven in figuur 1.



Figuur 1: Een generator met een vliegwiel.

De dynamica van het systeem kan worden beschreven door de volgende differentiaalvergelijking:

$$J\ddot{\theta}(t) = T_{ext}(t) - \frac{K_r^2}{R}\dot{\theta}(t)$$

met $J = 0.25\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$ en $R = 200$ ohm.

a) Geef de overdrachtsfunctie $G(s)$ van de input T_{ext} naar de output $\omega = \dot{\theta}$ en bepaal de waarde van K_r zo dat de tijdsconstante van het systeem 0.5 seconden bedraagt.

(13 p)

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{T_{ext}(s)} = \frac{R/K_r^2}{\frac{JR}{K_r^2}s+1} = \frac{2}{0.5s+1}$$

$$K_r = 10$$

Berekening / motivering:

$$J\dot{\omega}(t) = T_{ext}(t) - \frac{K_r^2}{R}\omega(t)$$

$$\left(Js + \frac{K_r^2}{R}\right)\Omega(s) = T_{ext}(s)$$

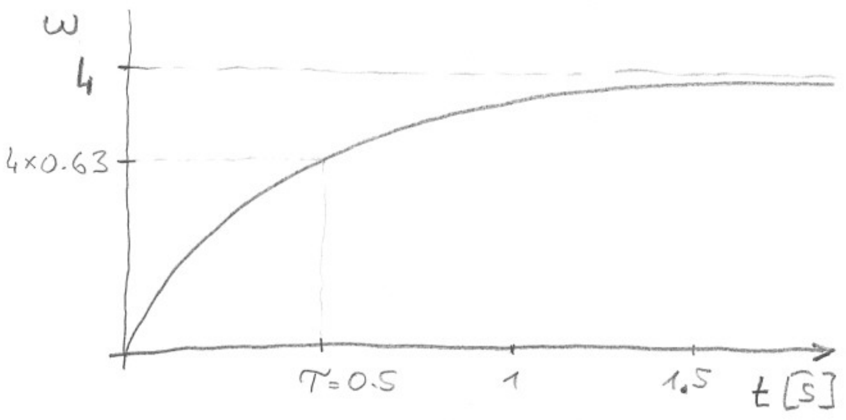
$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{T_{ext}(s)} = \frac{1}{Js + \frac{K_r^2}{R}} = \frac{\frac{R}{K_r^2}}{\frac{JR}{K_r^2}s+1} = \frac{K}{\tau s+1}$$

$$\tau = \frac{JR}{K_r^2} \Rightarrow K_r = \sqrt{\frac{JR}{\tau}}$$

$$K_r = \sqrt{\frac{0.25\cdot 200}{0.5}} = 10$$

b) Schets de responsie van het systeem in het tijdsdomein wanneer de input T_{ext} een stapfunctie is van grootte 2. Label de assen, geef de tijdsconstante en de *steady-state* waarde van ω aan in de schets. **(7 p)**

Responsie schets:



c) Stel dat we het systeem nu gaan regelen met een regelaar

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{s+15}{s+2}$$

met $E(s) = R(s) - Y(s)$. Geef de gesloten-lus overdrachtsfunctie $G_c(s)$ van de reference $R(s)$ naar de output $Y(s)$ (de hoeksnelheid $\Omega(s)$). Bepaal vervolgens de relatieve demping en de eigenfrequentie van het gesloten-lus systeem. **(15 p)**

$$G_c(s) = \frac{4s+60}{s^2+8s+64}$$

$$\omega_n = 8 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = 0.5$$

Berekening / motivering:

$$G_c(s) = \frac{G(s)\,C(s)}{1+G(s)\cdot C(s)} = \frac{2s+30}{0.5s^2+2s+2+2s+30}$$

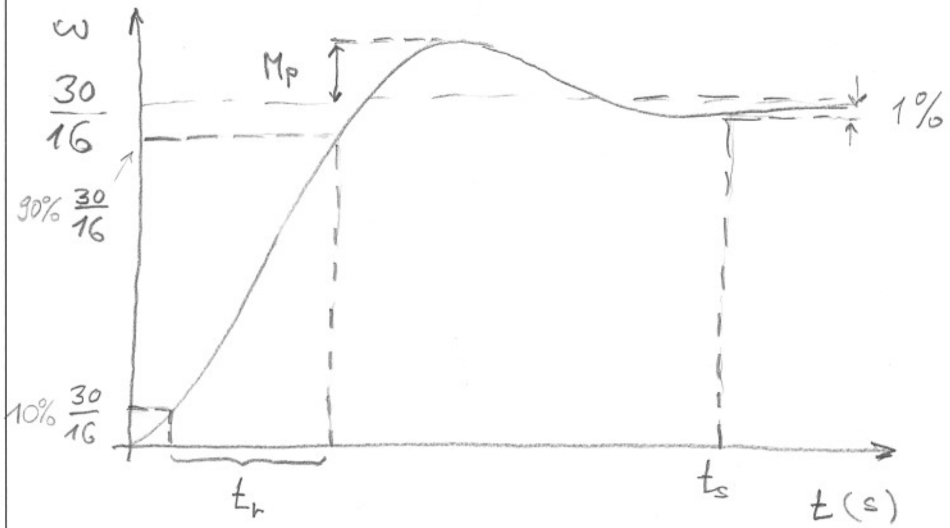
$$= \frac{4s+60}{s^2+8s+64}$$

$$\omega_n = \sqrt{64} = 8$$

$$2\zeta\omega_n = 8 \Rightarrow \zeta = 0.5$$

d) We zetten nu een stapfunctie met grootte 2 op de reference $R(s)$. Schets de responsie van het systeem in het tijdsdomein en geef duidelijk de *overshoot* M_p, de *settling time* t_s en de *rise time* t_r aan in de schets. **(9 p)**

Schets van de gesloten-lus responsie:



e) Bepaal het type van het systeem (geregeld met de regelaar gegeven onder vraag 1c), en bereken met behulp van de eindwaardestelling de *steady-state* regelfout e_{ss} voor $r(t) = 2$. NB: de *steady-state* waarde is gedefinieerd als $e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t)$. **(10 p)**

Type van het systeem $= 0$ (geen pure integrator in $G(s)\,C(s)$)

$e_{ss} = \frac{1}{8}$

Berekening / motivering:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{(s+15)\cdot 2}{(s+2)(0.5s+1)}} \cdot \frac{2}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{(s+2)(0.5s+1)\cdot 2}{(s+2)(0.5s+1) + 2s + 30}$$

$$= \frac{2\cdot 2}{2+30} = \frac{1}{8}$$

(het gesloten-lus systeem is stabiel, zie 1c)

2. Gegeven is het volgende open-lus systeem:

$$G(s) = \frac{50}{(s+3)(s^2+4s+4)}$$

a) Ontwerp een PD regelaar $D(s) = K_p(1 + T_d s)$ zodat het geregelde systeem aan de volgende eisen voldoet:

- een cross-over frequentie van $\omega_c = 4\text{rad/s}$
- een fase marge van $\text{PM} = 45°$

Laat alle stappen uit je berekening zien. **(22 p)**

$$K_p = \sqrt{2}$$
$$T_d = \frac{1}{4}$$

Berekening / motivering: $\omega_c = 4 \Rightarrow G(j\omega_c) = G(4j)$

$$G(4j) = \frac{50}{(4j+3)(-16+16j+4)} = \frac{50}{(4j+3)(16j-12)}$$

$$= \frac{50}{-64-36+48j-48j} = \frac{50}{-100} = -\frac{1}{2}$$

$$\angle G(4j) = -180° \qquad |G(4j)| = \frac{1}{2}$$

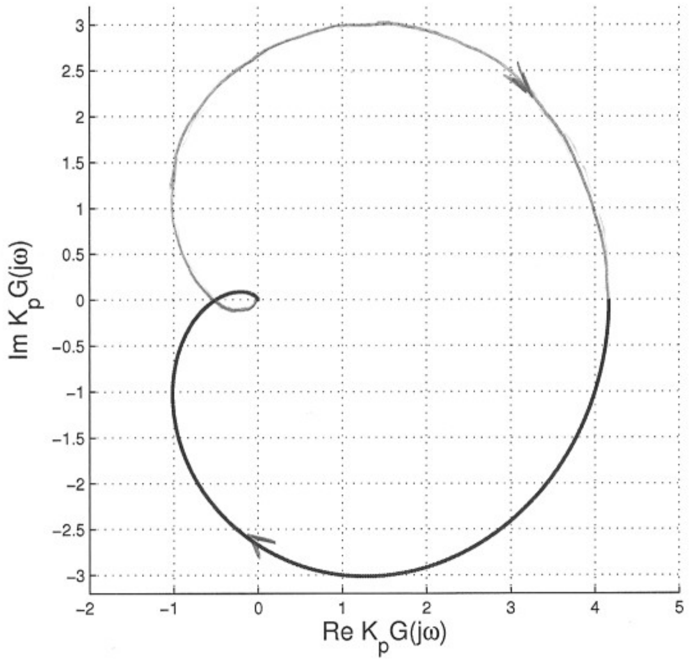
$$\angle(1 + T_d j\omega_c) = 45° \Rightarrow T_d = \frac{\tan 45°}{4}$$

$$T_d = \frac{1}{4}$$

$$1 = K_p \cdot |1 + T_d j\omega_c| \cdot |G(j\omega_c)|$$

$$K_p = \frac{1}{|1 + \frac{1}{4} \cdot 4j| \cdot 0.5} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

b) Hieronder is een Nyquist-plot weergegeven van $K_pG(s)$ met $K_p = 1$ voor positieve ω. Maak de Nyquist-plot compleet voor alle waarden van $\omega \in (-\infty, \infty)$. Geef de richting van stijgende ω aan. Pas het Nyquist criterium toe. Is het gesloten-lus systeem stabiel? **(8 p)**



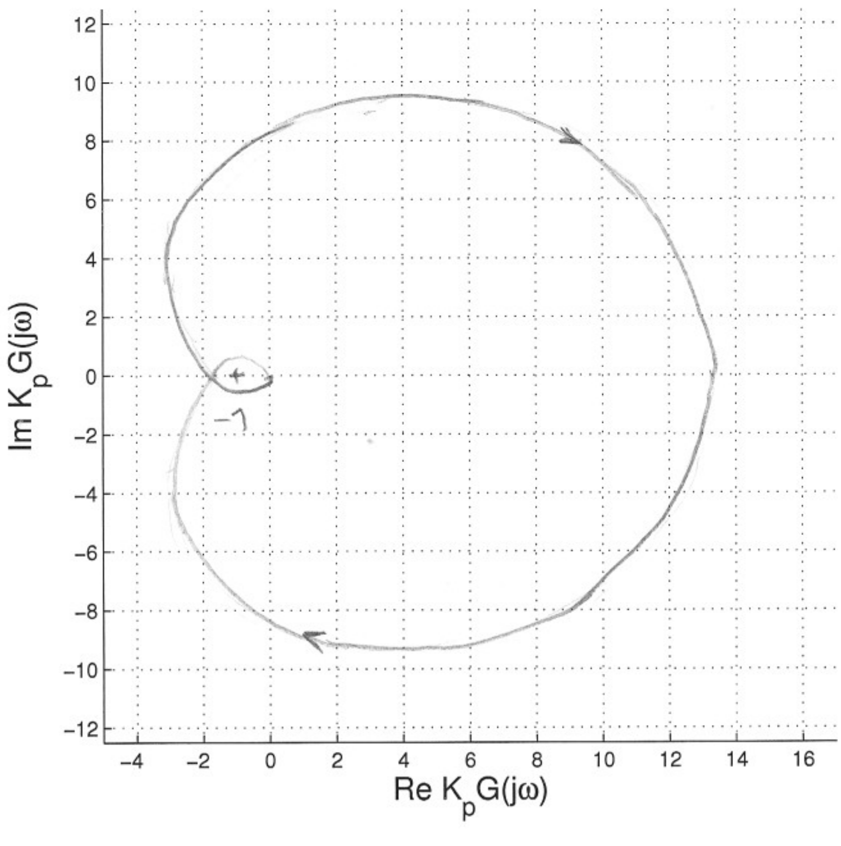
$Z =$ 0

$P =$ 0

$N =$ 0

Stabiel? ja

c) Schets de Nyquist-plot van $K_pG(s)$ met $K_p = 3$ voor alle waarden van $\omega \in (-\infty, \infty)$. Pas het Nyquist criterium toe. Is het gesloten-lus systeem stabiel? **(8 p)**



$Z =$ 2

$P =$ 0

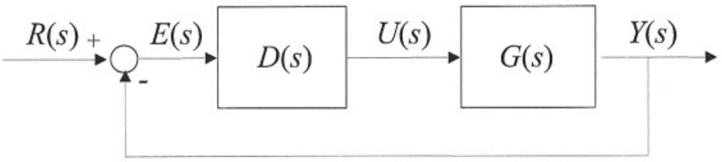
$N =$ 2

Stabiel? nee

3. Gegeven is het volgende open-lus systeem:

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 5s + 6)}$$

Voor dit systeem wordt een regelaar $D(s)$ ontworpen in de gesloten-lus configuratie zoals aangegeven in figuur 2.

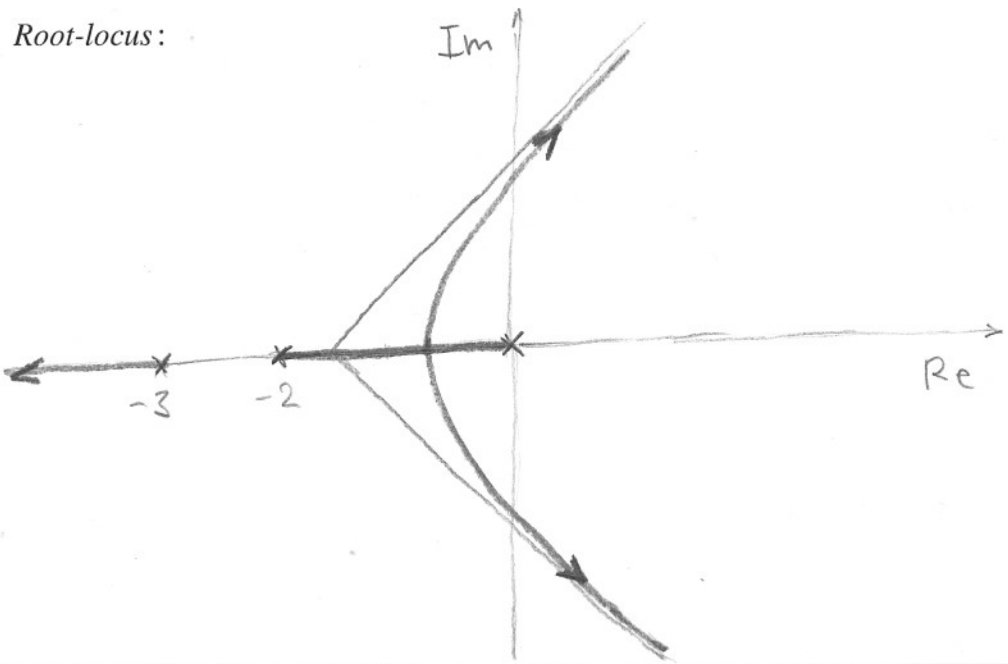


Figuur 2: Blok-schema van de gesloten lus.

a) Veronderstel een proportionele regelaar $D(s) = K_p$, met $K_p > 0$. Geef de gesloten-lus karakteristieke vergelijking in de root-locus vorm en schets de bijbehorende *root locus*. Geef de richting van stijgende K_p aan. Bespreek hoe de stabiliteit van het gesloten-lus systeem wordt beïnvloed door K_p. **(13 p)**

Karakteristieke vergelijking: $1 + K_p \dfrac{1}{s(s+2)(s+3)} = 0$

Root-locus:



Is het gesloten-lus systeem stabiel voor alle $K_p > 0$? Motiveer uw antwoord.

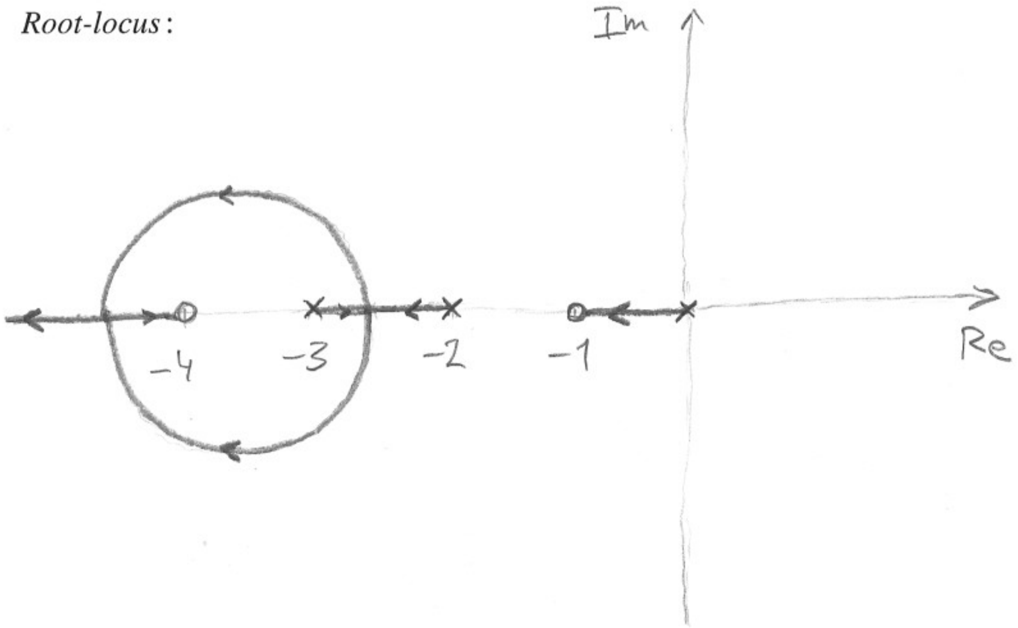
Nee, er zijn twee asymptoten die in het rechterhalfvlak komen. Voor K_p groot genoeg zullen er twee polen in het rechterhalfvlak liggen.

b) Veronderstel nu de volgende regelaar $D(s) = K_p(s+1)(s+4)$, met $K_p > 0$. Geef de gesloten-lus karakteristieke vergelijking in de root-locus vorm en schets de bijbehorende *root locus*. Geef de richting van stijgende K_p aan. Bespreek hoe de prestatie van het gesloten-lus systeem wordt beïnvloed door K_p. **(17 p)**

Karakteristieke vergelijking:

$$1 + K_p \frac{(s+1)(s+4)}{s(s+2)(s+3)} = 0$$

Root-locus:



Is het gesloten-lus systeem stabiel voor alle $K_p > 0$? Hoe wordt de prestatie van het gesloten-lus systeem beïnvloed door K_p?

Ja, het gesloten-lus systeem is stabiel voor alle $K_p > 0$.

De responsie van het systeem zal sneller worden naarmate K_p toeneemt.

4. Gegeven is de volgende overdrachtsfunctie:

$$G(s) = \frac{50(s+2)(s+3)}{6s^2(s+5)}$$

Schrijf de overdrachtsfunctie eerst om in de standaard vorm voor het tekenen van een Bode diagram. Bereken de polen, nulpunten en geef de bijbehoorende frequenties van de kantelpunten (*breakpoints*). Teken vervolgens nauwkeurig de asymptoten voor zowel de magnitude als de fase plot. Label de assen en geef in de magnitude plot de helling van de asymptoten aan. De werkelijke kromme hoeft niet getekend te worden. **(24 p)**

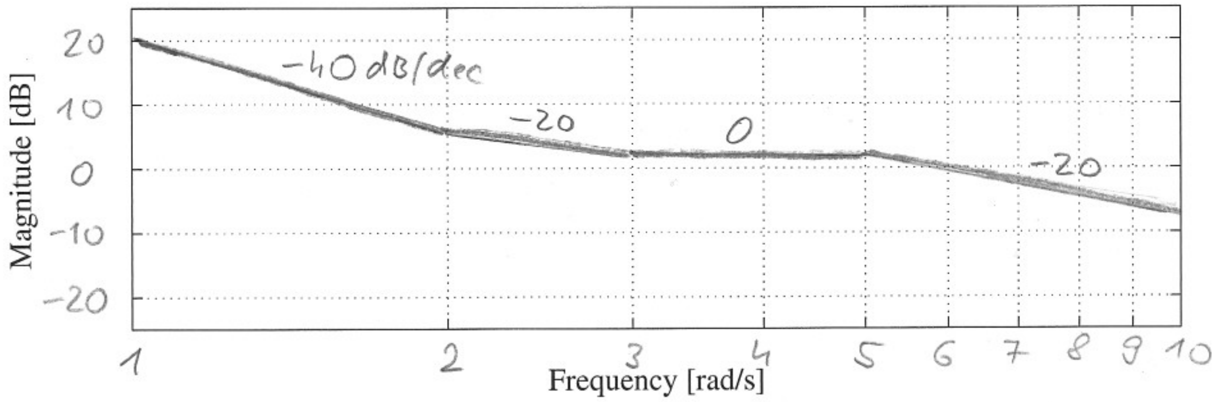
$$G(j\omega) = 10\,\frac{\left(\frac{j\omega}{2}+1\right)\left(\frac{j\omega}{3}+1\right)}{(j\omega)^2\left(\frac{j\omega}{5}+1\right)}$$

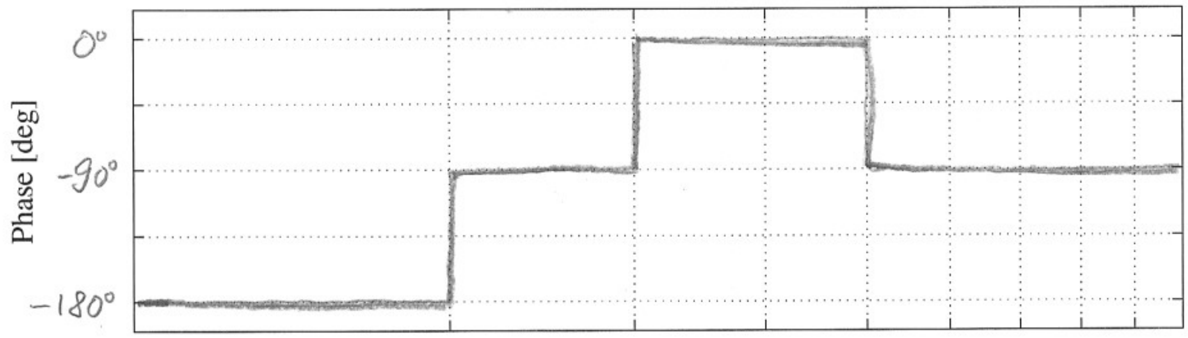
Polen, nulpunten en frequenties van de kantelpunten:

polen: 0 (2x), −5 nulpunten: −2, −3

kantelpunten (rad/s):

2 (nulpunt), 3 (nulpunt), 5 (pool)





5. Een systeem is beschreven door een model in de toestandsvorm:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

a) Bereken de overdrachtsfunctie van dit systeem. **(12 p)**

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10\,(s+4)}{(s+2)(s+1)}$$

Berekening / motivering:

$$G(s) = C\,(sI - A)^{-1} B$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+2 & -2 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+2)(s+1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1 & 2 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{10\,(s+4)}{(s+2)(s+1)}$$

b) Dit systeem wordt geregeld door middel van een twee-graden-van-vrijheid toestandsregelaar (*two-degree-of-freedom state-feedback controller*) $u(t) = -Kx(t) + K_{ff}r(t)$, met $r(t)$ de referentie voor de uitgang. Bereken de feedback versterkingsvector $K = [k_1 \;\; k_2]$ en de *feedforward* versterking K_{ff} zodanig dat de stationaire versterking (*DC gain*) van $G_{cl}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ gelijk is aan 2 en dat de gesloten-lus polen gelijk zijn aan -10 en -1. **(22 p)**

$$K = (-0.4 \quad 0.8)$$

$$K_{ff} = 0.5$$

Berekening / motivering:

$$\det(sI - A + BK) = (s+10)(s+1)$$
$$= s^2 + 11s + 10$$

$$A - BK = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -10k_1 & -1-10k_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(sI - A + BK) = (s+2)(s+1+10k_2) + 20k_1 =$$

$$s^2 + (1+10k_2)s + 2s + 2 + 20k_2 + 20k_1 =$$

$$= s^2 + (3+10k_2)s + 2 + 20k_2 + 20k_1$$

$$3 + 10k_2 = 11 \Rightarrow k_2 = 0.8$$

$$2 + 20k_2 + 20k_1 = 10 \Rightarrow k_1 = -0.4$$

$$G_{ce}(s) = \frac{B_{ol}(s)}{A_{ce}(s)} = \frac{10(s+4)}{s^2 + 11s + 10}$$

$$G_{ce}(0) = \frac{40}{10} = 4$$

$$K_{ff}\, G_{ce}(0) = 2 \Rightarrow K_{ff} = 0.5$$

Einde tentamen