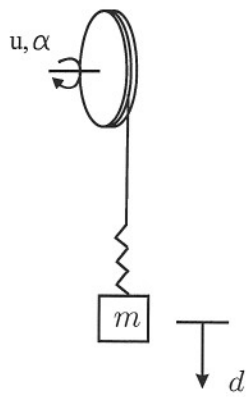
1. Een katrol syteem is schematisch weergegeven in figuur 1.



Figuur 1: Katrol systeem.

De katrol schijf heeft een straal r en een traagheidsmoment I, de massa hangt aan een rekbaar touw met een veerconstante k. Het katrol wordt bestuurd met u (moment op de katrol), de positie van de massa d en de hoekverdraaiing van de katrol schijf α worden gemeten. De bewegingsvergelijking van dit systeem is:

$$I\ddot{\alpha}(t) = rkd(t) - r^2k\alpha(t) + u(t) \quad (1)$$
$$m\ddot{d}(t) = rk\alpha(t) - kd(t) \quad (2)$$

a) Geef de overdrachtsfunctie $G(s) = \dfrac{D(s)}{U(s)}$. **(16 p)**

$$G(s) = \frac{D(s)}{U(s)} = \frac{rk}{s^2(Ims^2 + kI + r^2km)}$$

Berekening / motivering:

$(1) \rightarrow (Is^2 + r^2k)\,\alpha(s) = rk\,D(s) + U(s)$

$(2) \rightarrow (ms^2 + k)\,D(s) = rk\,\alpha(s)$

$(Is^2 + r^2k)(ms^2 + k)\,D(s) = r^2k^2 D(s) + rk\,U(s)$

$(Im\,s^4 + kIs^2 + r^2kms^2)\,D(s) = rk\,U(s)$

$$G(s) = \frac{D(s)}{U(s)} = \frac{rk}{s^2(Ims^2 + kI + r^2km)}$$

b) Neem de volgende overdrachtsfunctie $G(s)$:

$$G(s) = \frac{D(s)}{U(s)} = \frac{6}{0.36s^4 + 9s^2}$$

Geef de impulsrespons (in het tijdsdomein) van de *versnelling* $\ddot{d}(t)$ van de massa.

(14 p)

$\ddot{d}(t) = \frac{10}{3} \sin(5t)$

Berekening / motivering: $\delta(t) \rightarrow U(s) = 1$

$$s^2 D(s) = \frac{6}{0.36 s^2 + 9}$$

$$= \frac{6}{\frac{9}{25} s^2 + 9} = \frac{25 \cdot \frac{2}{3}}{s^2 + 25} = \frac{10}{3} \frac{5}{s^2 + 5^2}$$

$$\ddot{d}(t) = \frac{10}{3} \sin(5t)$$

c) Definieer de toestandsvector als $x = (d,\ \alpha,\ \dot{d},\ \dot{\alpha})^T$ en de output vector als $y = (d,\ \alpha)^T$. Schrijf het systeem (1)–(2) in toestandsvorm. **(14 p)**

Geef de matrices A, B, C, D:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{rk}{m} & 0 & 0 \\ \frac{rk}{I} & -\frac{r^2 k}{I} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Gegeven is een systeem $G(s)$, dat met een PD-regelaar $D(s)$ wordt geregeld:

$$G(s) = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \qquad D(s) = K\,(1 + T_d s)$$

a) Neem $T_d = 0.1$, $\tau_1 = 1$ en $\tau_2 = 0.2$. De versterking K moet nog worden bepaald. Geef de gesloten-lus karakteristieke vergelijking in de *root-locus* vorm. **(4 p)**

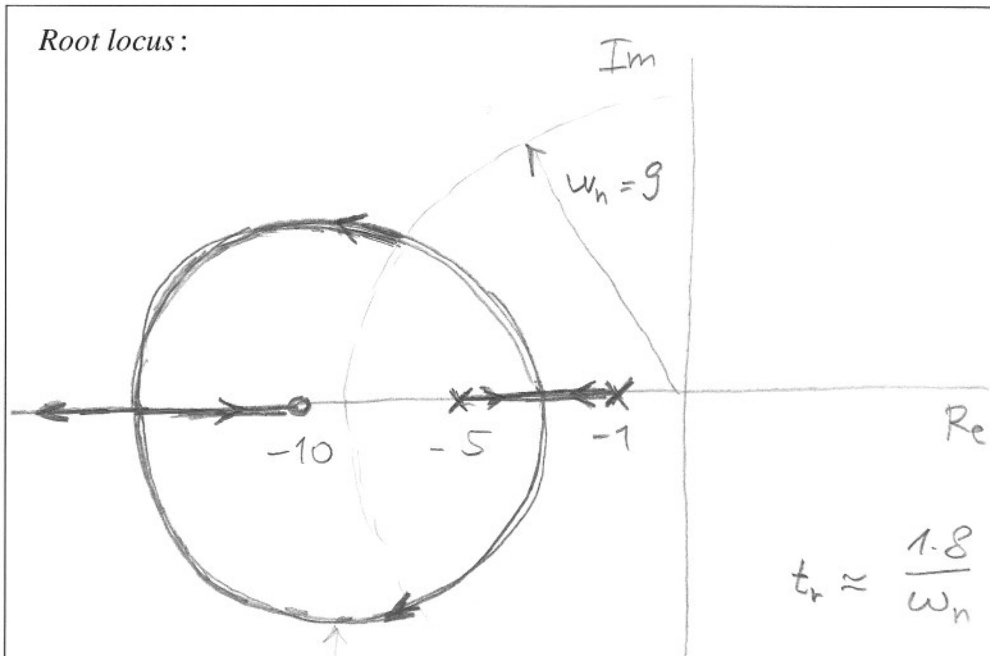
Karakteristieke vergelijking:

$$1 + K\,\frac{0.1s + 1}{(s+1)\,(0.2s+1)} = 0$$

b) Schets de *root locus* voor $K \geq 0$. Geef de richting van stijgende K aan en bespreek hoe de stabiliteit van het gesloten-lus systeem wordt beïnvloed door K. Geef aan waar de polen van het gesloten-lus systeem zich moeten bevinden, als de volgende eis is opgelegd:

◇ een *rise time* onder 0.2 s **(22 p)**

Root locus:



$$t_r \approx \frac{1.8}{\omega_n}$$

$$t_r < 0.2\,s$$

$$\omega_n > 9\,\frac{rad}{s}$$

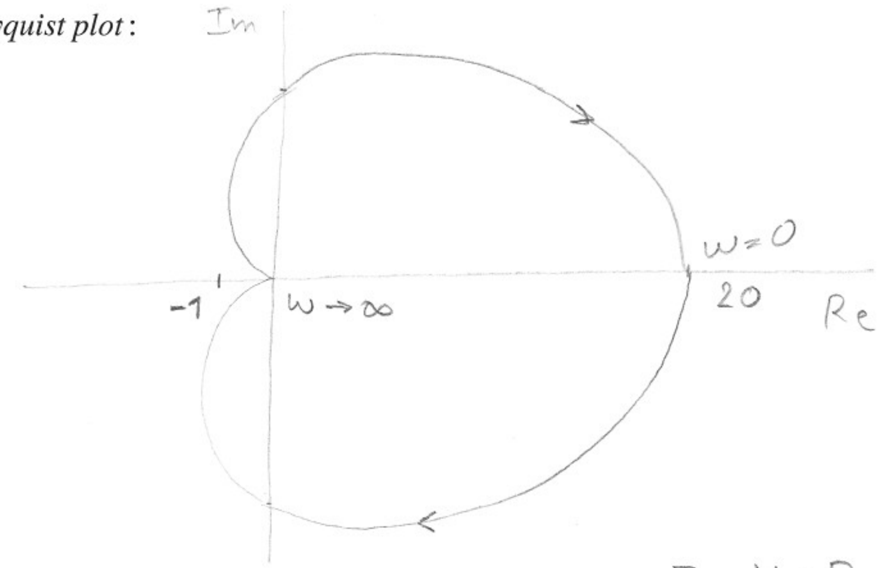
de polen moeten buiten de cirkel met r = 9 rad/s liggen

Stabiliteit:

stabiel voor alle $K > 0$

c) Schets de *Nyquist plot* voor $G(j\omega)D(j\omega)$ met $D(j\omega) = 20$. Geef de richting van stijgende ω aan en pas het Nyquist criterium toe. **(12 p)**

Nyquist plot:



Stabiliteit:

$Z = N + P$

$P = 0$ ... geen polen in RHP

$N = 0$ ... geen omcirkeling

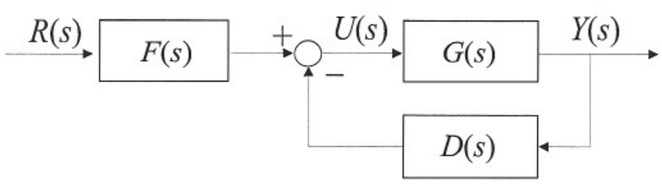
$\Big\}$ $Z = 0 \Rightarrow$ stabiel

---

3. Gegeven is het regelschema in figuur 2 met de gesloten-lus overdrachtsfunctie

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^2 + 2s + 2},$$

de *feedback* regelaar $D(s) = 3 + 3s$, de *feedforward* regelaar $F(s) = 2$ en het proces $G(s)$.



Figuur 2: Blok-schema van het geregelde systeem.

a) Bereken de natuurlijke frequentie ω_n, de damping ratio ζ en de stationaire versterking (*DC gain*) van $H(s)$. **(6 p)**

$\omega_n = \sqrt{2}$

$\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

DC gain $= 5$

$$s^2 + \underbrace{2\zeta\omega_n}_{2} s + \underbrace{\omega_n^2}_{2}$$

b) Geef de differentiaalvergelijking die bij de overdrachtsfunctie $H(s)$ hoort. **(4 p)**

Differentiaal vergelijking:

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 2y(t) = 10\,r(t)$$

Berekening / motivering:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^2 + 2s + 2}$$

$$s^2 Y(s) + 2s\,Y(s) + 2\,Y(s) = 10\,R(s)$$

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 2y(t) = 10\,r(t)$$

c) Geef de *open-loop* overdrachtsfunctie $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$ van het proces. **(20 p)**

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5}{s^2 - 13s - 13}$$

Berekening / motivering:

$$H = \frac{FG}{1 + GD} \Rightarrow H + GDH = FG$$

$$H = G(F - DH) \Rightarrow G = \frac{H}{F - DH}$$

$$G = \frac{\dfrac{10}{s^2 + 2s + 2}}{2 - \dfrac{10(3s+3)}{s^2 + 2s + 2}}$$

4. Gegeven is een systeem $G(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{(s+3)(s+20)}$$

Voor dit systeem is de volgende *lead* regelaar $D(s)$ al ontworpen:

$$D_{\text{lead}}(s) = \frac{1068(s+3)}{s+40}$$

a) Toon aan dat de *cross-over frequentie* $\omega_c = 15\,\text{rad/s}$. **(14 p)**

Berekening / motivering: $L(j\omega_c) = D(j\omega_c) \cdot G(j\omega_c) \overset{def}{=} 1$

$$L(s) = \frac{1068\,(s+3)}{(s+3)(s+20)\,(s+40)} = \frac{1068}{(s+20)\,(s+40)}$$

$$|L(15j)| = \frac{1068}{\sqrt{400+225}\;\sqrt{1600+225}} = \frac{1068}{25\sqrt{1825}}$$

$|L(15j)| = 1 \Rightarrow \omega_c = 15$ rad/s is de cross-over frequentie

b) Bereken de *phase margin* PM en de *gain margin* GM. **(10 p)**

PM $= 123°$

GM $= \infty$

Berekening / motivering:

$$\angle L(j\omega_c) = \angle L(15j) = 0 - \tan^{-1}\frac{15}{20} - \tan^{-1}\frac{15}{40}$$

$$\cong -57°$$

$$PM = -57° + 180° = 123°$$

$$\angle L(j\omega) > -180° \quad \forall\ \omega > 0,\ \omega < \infty$$

$$\Rightarrow GM = \infty$$

c) Om de *steady-state* fout te verkleinen wordt een *lag* regelaar ontworpen:

$$D_{\text{lag}}(s) = \beta \frac{T_{\text{lag}} s + 1}{\beta T_{\text{lag}} s + 1}$$

met $T_{\text{lag}} = 1$. De complete regelaar is nu $D(s) = D_{\text{lag}}(s) D_{\text{lead}}(s)$. Bereken de minimale waarde van β zodat de *steady-state* fout $e_{ss} \leq 0.1$ voor een eenheidsstap referentiesignaal. **(12 p)**

$\beta = 6{,}75$

Berekening / motivering: $D_{lag}(0) = \beta$

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \beta L(0)} \qquad L(0) = \frac{1068}{800}$$

$$0.1 = \frac{1}{1 + \beta L(0)} \Rightarrow \beta = \frac{9}{L(0)}$$

$$\beta = \frac{7200}{1068}$$

$$\beta = 6{,}75$$

d) Neem $\beta = 10$ en $\omega_c = 15$ rad/s. Bereken de *phase margin* PM met de *lead-lag* regelaar $D(s) = D_{\text{lag}}(s) D_{\text{lead}}(s)$. **(8 p)**

PM $= 120^\circ$

Berekening / motivering: $D_{lag}(j\omega_c) = 10 \dfrac{j\omega_c + 1}{10 j\omega_c + 1}$

$$\angle D(15j) = \tan^{-1} 15 - \tan^{-1} 150$$

$$\cong -3^\circ$$

$$PM = 123^\circ - 3^\circ = 120^\circ$$

5. Gegeven is de volgende overdrachtsfunctie:

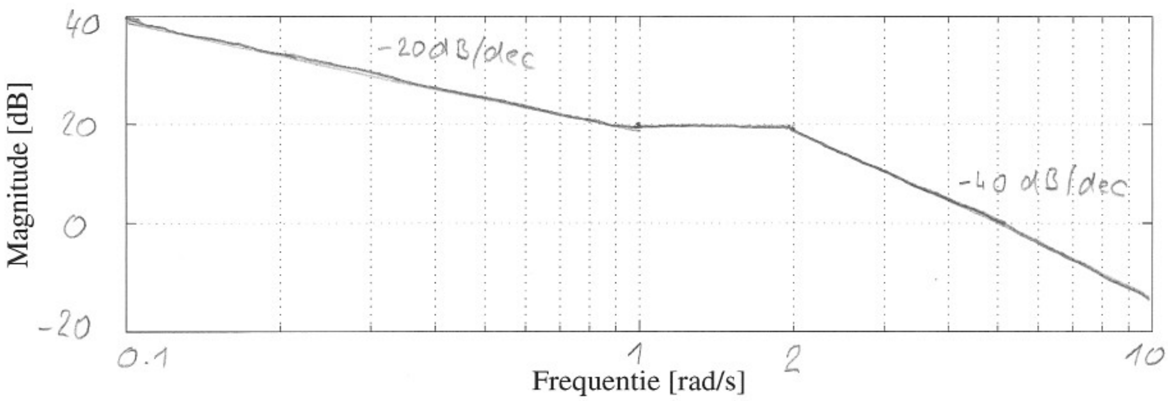
$$G(s) = \frac{40(s+1)}{s(s+2)^2}$$

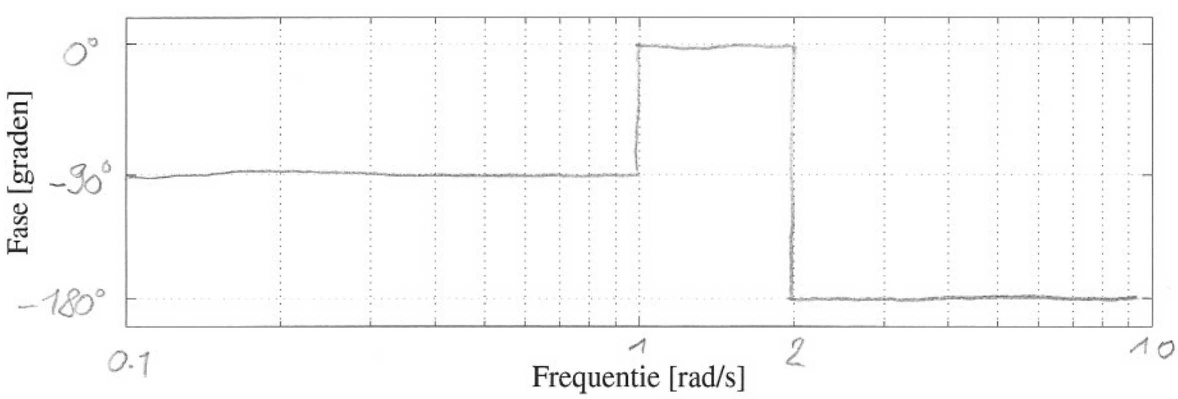
Teken alleen de asymptotenbenadering van het Bode diagram van $G(s)$. Schrijf de overdrachtsfunctie eerst om in een geschikte vorm. Bereken dan de frequenties van de kantelpunten (*breakpoints*). Teken vervolgens nauwkeurig de asymptoten voor zowel de magnitude als de fase plot. Label de assen. **(24 p)**

$$G(j\omega) = \frac{40(j\omega+1)}{j\omega\, 4\left(\frac{j\omega}{2}+1\right)^2} = \frac{10\,(j\omega+1)}{j\omega\left(\frac{j\omega}{2}+1\right)}$$

Frequenties van de kantelpunten:

0 (pool), 1 (nulpunt), 2 (2x pool)





Einde tentamen

vraagstuk	1 a	1 b	1 c	2 a	2 b	2 c	3 a	3 b	3 c	4 a	4 b	4 c	4 d	5
score														