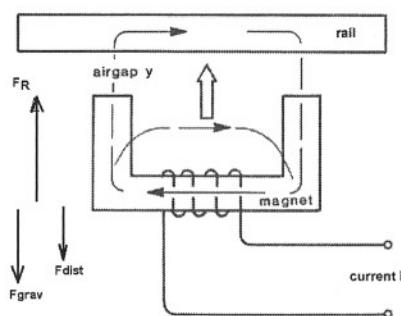


1. Een magnetische levitatie systeem is schematisch weergegeven in figuur 1.



Figuur 1: Een schematische weergave van een magnetische levitatie systeem.

Een gelineariseerd wiskundig model in de toestandsvorm is:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 100 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1 \ 0) x(t)$$

met u het stuursignaal (stroom door de spoel) en y de te regelen output (de luchtspleet).

a) Geef de open-lus overdrachtsfunctie $G(s) = Y(s)/U(s)$. (10 p)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-2}{s^2 - 100}$$

Berekening / motivering: $G(s) = C (sI - A)^{-1} B + D$

$$G(s) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} s & -1 \\ -100 & s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2 - 100} (1 \ 0) \begin{pmatrix} s & 1 \\ 100 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-2}{s^2 - 100}$$

- b) Het systeem wordt geregeld door middel van een toestandsregelaar $u(t) = -Kx(t) + K_{ff}r(t)$, met $r(t)$ de referentie voor de luchtspleet en K , K_{ff} de regelaarparameters. Bereken K zodanig dat de gesloten-lus karakteristieke polynoom een relatieve demping heeft $\zeta = 0.9$ en een natuurlijke frequentie $\omega_n = 30$ rad/s. (18 p)

$$K = (-500 \quad -27)$$

Berekening / motivering: $\det(sI - A + BK) =$
 $= \det\left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 100 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2k_1 & -2k_2 \end{pmatrix}\right) =$
 $= \det\begin{pmatrix} s & -1 \\ -100-2k_1 & s-2k_2 \end{pmatrix} = s^2 - 2k_2s - 100 - 2k_1$

gewenst: $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 54s + 900$

$$\left. \begin{array}{l} -2k_2 = 54 \\ -100 - 2k_1 = 900 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} k_2 = -27 \\ k_1 = -500 \end{array}$$

$$K = (-500 \quad -27)$$

- c) Bereken de feedforward versterkingsfactor K_{ff} zodanig dat de stationaire versterking (DC gain) van $G_{cl}(s)$ gelijk is aan 2. (12 p)

$$K_{ff} = -900$$

Berekening / motivering: $G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$; $G_{ce}(s) = \frac{B(s)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

$$G_{ce} = \frac{-2}{s^2 + 54s + 900} \Rightarrow G_{ce}(0) = \frac{-2}{900}$$

$$K_{ff} \cdot G_{ce}(0) = 2$$

$$K_{ff} = \frac{2}{\frac{-2}{900}} = -900$$

2. Gegeven is een systeem $G(s)$, dat met een PI-regelaar $D(s)$ wordt geregeld:

$$G(s) = \frac{1}{(3s+1)(s+1)} \quad D(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

- a) Neem $T_i = 3$. Voor welke waarde van de regelaarversterking K heeft het geregelde systeem een fase marge van $PM = 60^\circ$? (25 p)

$$K = 2$$

Berekening / motivering: $D(s) = K \left(1 + \frac{1}{3s} \right) = K \frac{3s+1}{3s}$

$$L(s) = G(s) \cdot D(s) = \frac{K(3s+1)}{3s(3s+1)(s+1)} = \frac{K}{3s(s+1)}$$

$$\angle L(j\omega_c) = -120^\circ \Rightarrow \angle \left(\underbrace{3j\omega_c}_{90^\circ} \underbrace{(j\omega_c+1)}_{30^\circ} \right) = 120^\circ$$

$$\angle (j\omega_c + 1) = 30^\circ \Rightarrow \omega_c = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\left| \frac{K}{3j\omega_c(j\omega_c+1)} \right| = 1 \Rightarrow K = |3j\omega_c(j\omega_c+1)|$$

$$K = \left| 3j \frac{\sqrt{3}}{3} \left(j \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 \right) \right|$$

$$K = \left| -1 + \sqrt{3}j \right| = \sqrt{1+3} = 2$$

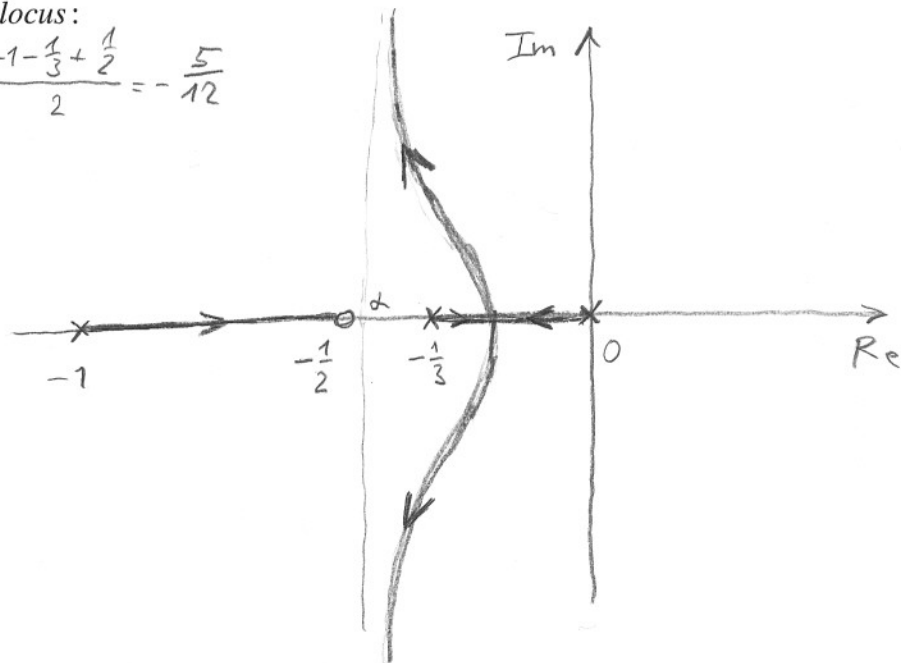
- b) Neem $T_i = 2$. Geef de gesloten-lus karakteristieke vergelijking in de root-locus vorm en schets de bijbehorende *root locus* voor $K \geq 0$. Geef de richting van stijgende K aan. Bespreek hoe de stabiliteit van het gesloten-lus systeem wordt beïnvloed door K . (14 p)

Karakteristieke vergelijking:

$$1 + K \frac{2s+1}{2s(3s+1)(s+1)} = 0$$

Root-locus:

$$\alpha = \frac{-1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{2} = -\frac{5}{12}$$

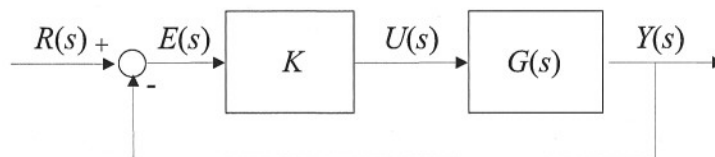


Stabiliteit: stabiel voor alle $K \geq 0$
als $K \rightarrow \infty$, meer oscillaties

3. Het systeem:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

wordt geregeld met een proportionele regelaar in de gesloten-lus configuratie zoals aangegeven in figuur 2.



Figuur 2: Blok-schema van de gesloten lus.

a) Bereken de bandbreedte van het gesloten-lus systeem voor $K = 10$.

(15 p)

$$\omega_{BW} = 4,56 \text{ rad/s}$$

Berekening / motivering: $G_{cl}(s) = \frac{G(s) \cdot K}{1 + G(s) K}$

$$G_c(s) = \frac{\frac{K}{s^2 + 2s}}{1 + \frac{K}{s^2 + 2s}} = \frac{K}{s^2 + 2s + K} = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$$

$$\left| \frac{10}{(j\omega)^2 + 2j\omega + 10} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (-3\text{dB} \Rightarrow |G_c(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$200 = (10 - \omega^2)^2 + 4\omega^2$$

$$200 = 100 - 20\omega^2 + \omega^4 + 4\omega^2 \quad \text{subst. } \omega^2 = a$$

$$a^2 - 16a - 100 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = 8 \pm \frac{\sqrt{256 + 400}}{2}$$

$$\omega = \sqrt{a_1}$$

$$\omega = \sqrt{20,8}$$

$$\omega = \omega_{BW} = 4,56 \text{ rad/s}$$

$$a_1 = 20,8$$

a_2 = negatief
(n.v.t.)

b) Geef de overdrachtsfunctie $G_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)}$. Bereken de *steady-state* waarde e_{ss} als functie van K voor de volgende drie signalen: $r(t) = 1$, $r(t) = t$, $r(t) = 0.5t^2$.

NB: de *steady-state* waarde is gedefinieerd als $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$.

(10 p)

$$G_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 2s}{s^2 + 2s + K}$$

$$r(t) = 1 \quad e_{ss} = 0$$

$$r(t) = t \quad e_{ss} = \frac{2}{K}$$

$$r(t) = 0.5t^2 \quad e_{ss} = \infty$$

Berekening / motivering:

$$G_e(s) = \frac{1}{1 + G(s)K} = \frac{s^2 + 2s}{s^2 + 2s + K}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_e(s) \cdot R(s)$$

$$r(t) = 1 \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow e_{ss} = G_e(0) = 0$$

$$r(t) = t \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_e(s)}{s} = \frac{2}{K}$$

$$r(t) = \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s^3} \Rightarrow e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_e(s)}{s^2} = \infty$$

c) Neem $K = 4$. Het inputsignaal $r(t)$ is de volgende sinusfunctie:

$$r(t) = 3 \sin(2t)$$

De steady state output $y(t)$ is ook een sinusfunctie, wel met een andere amplitude en fase. Bereken deze amplitude en fase en geef de formule voor $y(t)$. (12 p)

$$y(t) = 3 \sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Berekening / motivering:

$$r(t) = A \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow \omega = 2$$

$$y(t) = A \cdot |G_c(2j)| \cdot \sin(2t + \angle G_c(2j))$$

$$|G_c(2j)| = \left| \frac{K}{(2j)^2 + 4j + K} \right| = \left| \frac{4}{-4 + 4j + 4} \right| = 1$$

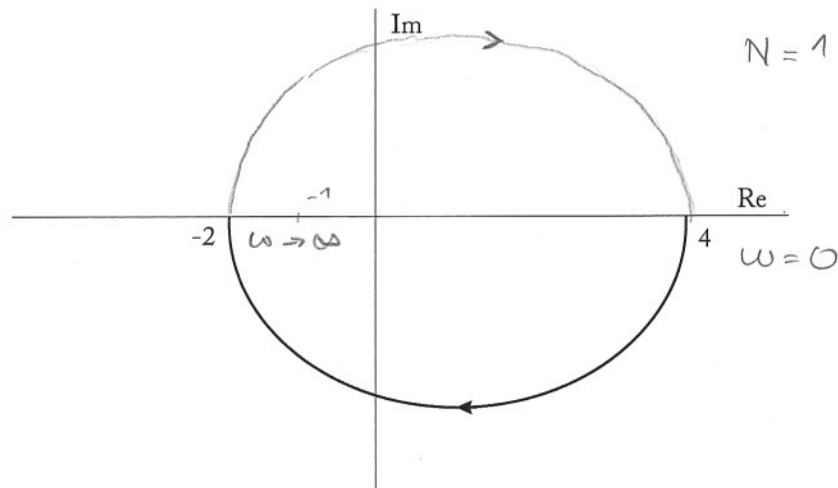
$$\angle G_c(2j) = \angle \left(\frac{4}{4j} \right) = -90^\circ = -\frac{\pi}{2}$$

$$y(t) = 3 \sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)$$

4. Gegeven is het volgende open-lus systeem:

$$G(s) = \frac{a(-s+b)}{s+1}$$

In figuur 3 is een Nyquist-plot weergegeven van de *loop-transfer* $KG(s)$ voor de regelaarversterking $K = 1$ en voor $\omega \in [0, \infty)$.



Figuur 3: Nyquist plot.

a) Bereken de waarde van a en b .

(10 p)

$$a = 2$$

$$b = 2$$

Berekening / motivering:

$$G(0) = \frac{a(-0+b)}{0+1} = ab = 4$$

$$G(\infty) = -a = -2 \Rightarrow a = 2$$

$$b = 2$$

$$G(s) = \frac{2(-s+2)}{s+1} = \frac{-2s+4}{s+1}$$

- b) Is voor deze waarde van de regelaarversterking ($K = 1$) het gesloten-lus systeem stabiel? Pas het Nyquist criterium toe. (10 p)

Is het gesloten-lus systeem stabiel? Nee

Motivering (toepassing van het Nyquist-criterium):

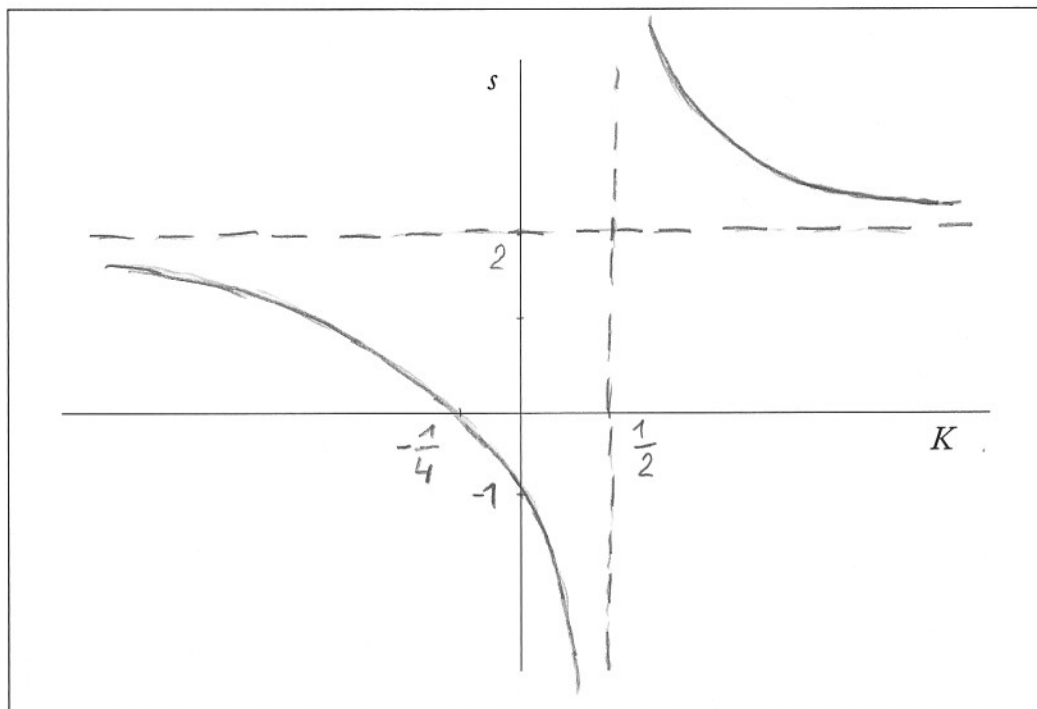
$$Z = N + P \leftarrow \begin{array}{l} \# \text{ open-lus polen} \\ \in \mathbb{C}^+ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \uparrow \\ \# \text{ gesloten-lus} \\ \text{polen} \in \mathbb{C}^+ \end{array} \quad \begin{array}{l} \nwarrow \\ \# \text{ omcirkelingen} \\ \text{van } -1 \end{array}$$

$$N = 1 \quad P = 0$$

$$Z = 1 + 0 = 1 \quad \leftarrow \begin{array}{l} 1 \text{ gesloten-lus pool} \\ \in \mathbb{C}^+ \end{array}$$

- c) Veronderstel $a = b = 2$. De gesloten lus pool is een reëel getal. Geef met behulp van een grafiek aan hoe de waarde van deze pool afhankelijk is van de regelaarversterking $K \in \mathbb{R}$ (positief en negatief). Geef het interval van versterkingen K voor welke het gesloten-lus systeem asymptotisch stabiel is. (20 p)



$$K \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

Berekening / motivering: $1 + K \frac{-2s+4}{s+1} = 0$

$$s+1 - 2Ks + 4K = 0$$

$$s(1-2K) + 1+4K = 0$$

$$s = -\frac{1+4K}{1-2K} \Rightarrow s < 0 \text{ als}$$
$$-\frac{1}{4} < K < \frac{1}{2}$$

$$K = 0 \Rightarrow s = -1$$

$$K \rightarrow \infty \Rightarrow s \rightarrow 2^+$$

$$K \rightarrow -\infty \Rightarrow s \rightarrow 2^-$$

$$K \rightarrow \frac{1}{2}^- \Rightarrow s \rightarrow -\infty$$

$$K \rightarrow \frac{1}{2}^+ \Rightarrow s \rightarrow +\infty$$

$$K = -\frac{1}{4} \Rightarrow s = 0$$

5. Gegeven is de volgende overdrachtsfunctie:

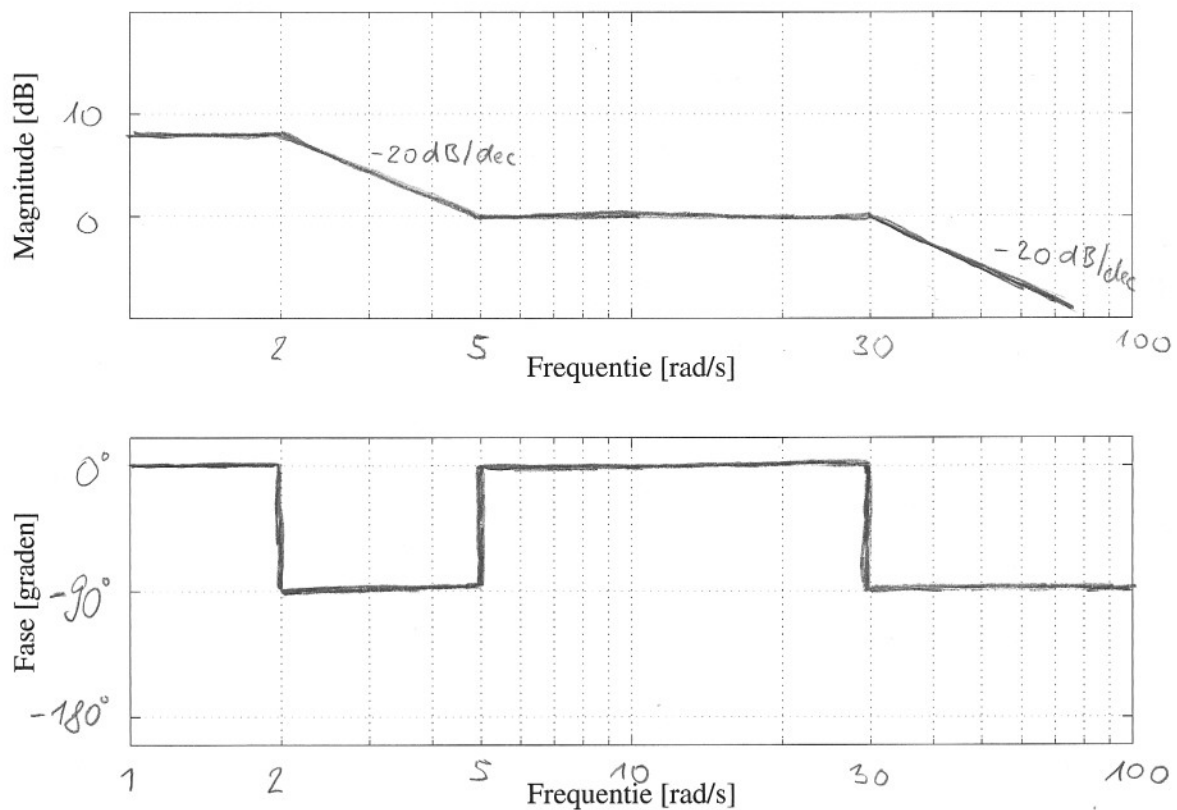
$$G(s) = \frac{30s + 150}{s^2 + 32s + 60}$$

Teken alleen de *asymptotenbenadering* van het Bode diagram van $G(s)$. Schrijf de overdrachtsfunctie eerst om in een geschikte vorm. Bereken dan de stationaire versterking en de polen en nulpunten. Teken vervolgens nauwkeurig de asymptoten voor zowel de magnitude als de fase plot. Label de assen. **(24 p)**

$$G(j\omega) = \frac{2,5 \left(\frac{j\omega}{5} + 1 \right)}{\left(\frac{j\omega}{30} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right)}$$

Stationaire versterking (DC gain): 2,5 ($\approx 8 \text{ dB}$)

Polen en nulpunten: -30, -2 (polen), -5 (nulpunt)



Figuur 4: Asymptotenbenadering van het Bode diagram.

— Einde tentamen —

| | | | | | | | | | | | | |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---|
| vraagstuk | 1 a | 1 b | 1 c | 2 a | 2 b | 3 a | 3 b | 3 c | 4 a | 4 b | 4 c | 5 |
| score | | | | | | | | | | | | |