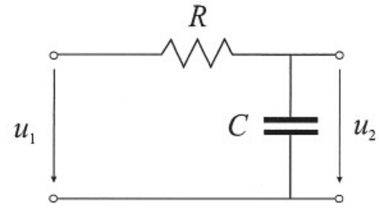
1. Gegeven is het volgende laag-doorlaat filter



Figuur 1: Laag-doorlaat filter.

beschreven met de differentiaal vergelijking:

$$C\dot{u}_2(t) = \frac{1}{R}\left(u_1(t) - u_2(t)\right)$$

met de capaciteit $C = 1 \cdot 10^{-4}$ F en een nog te bepalen weerstand R.

a) Geef de overdrachtsfunctie $G(s) = \dfrac{U_2(s)}{U_1(s)}$ en bereken de weerstand R zodanig dat de tijdsconstante gelijk is aan 2 seconden. **(10 p)**

Overdrachtsfunctie $G(s) = \dfrac{1}{RCs+1}$

$R = 2 \cdot 10^4\ \Omega$

Berekening / motivering:

$$RC\,\dot{u}_2(t) = u_1(t) - u_2(t)$$

$$RCs\,U_2(s) = U_1(s) - U_2(s)$$

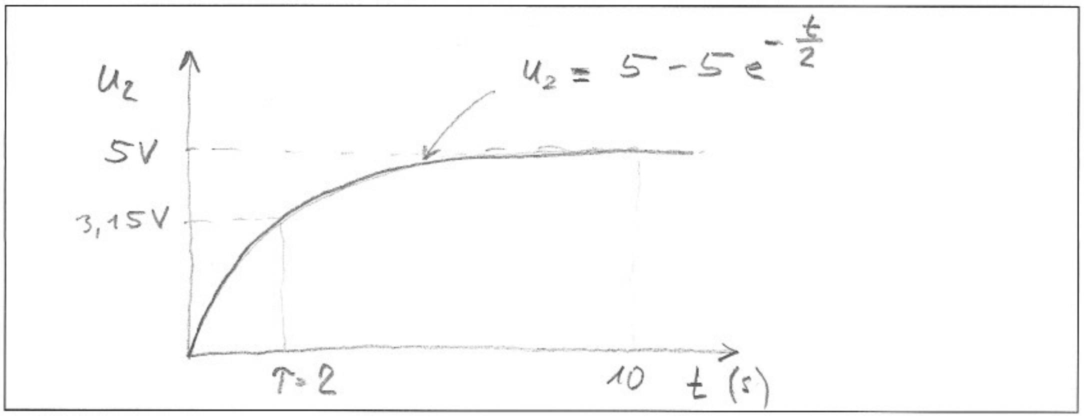
$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{RCs+1} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

$$\tau = RC \ , \ R = \frac{\tau}{C} = \frac{2}{10^{-4}} = 2 \cdot 10^4$$

b) Veronderstel de tijdsconstante van 2 seconden. Het inputsignaal $u_1(t)$, in Volt, is de functie:

$$u_1(t) = 0 \quad \text{voor} \quad t < 0 \qquad \text{en} \qquad u_1(t) = 5 \quad \text{voor} \quad t \geq 0$$

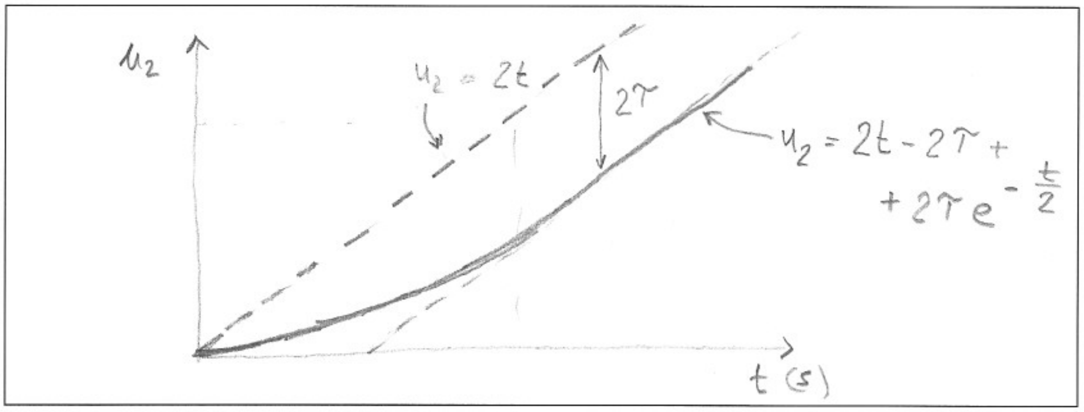
Schets zo nauwkeurig mogelijk de tijdsresponsie van het outputsignaal $u_2(t)$ in het interval $t \in [0, 10]$ s. In de grafiek, geef de steady-state waarde en de tijdsconstante aan. **(8 p)**



c) Veronderstel de tijdsconstante van 2 seconden. Het inputsignaal $u_1(t)$ is de functie:

$$u_1(t) = 0 \quad \text{voor} \quad t < 0 \qquad \text{en} \qquad u_1(t) = 2t \quad \text{voor} \quad t \geq 0$$

Schets zo nauwkeurig mogelijk de tijdsresponsie van het outputsignaal $u_2(t)$. **(8 p)**



d) Veronderstel de tijdsconstante van 2 seconden. Het inputsignaal $u_1(t)$ is de volgende sinusfunctie:

$$u_1(t) = 10\ \sin(0.5t)$$

De steady state output $u_2(t)$ is ook een sinusfunctie, wel met een andere amplitude en fase. Bereken deze amplitude en fase en geef de formule voor $u_2(t)$. **(12 p)**

$$u_2(t) = \frac{10}{\sqrt{2}} \sin\left(0.5t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Berekening / motivering:

$$u_2(t) = 10 \cdot |G(0.5j)| \cdot \sin(0.5t + \angle G(0.5j))$$

$$|G(0.5j)| = \frac{1}{|2 \cdot 0.5 \cdot j + 1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\angle G(0.5j) = 0 - \tan^{-1}\frac{1}{1} = -\frac{\pi}{4}$$

2. Gegeven is het volgende open-lus systeem:

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+s+5} \tag{1}$$

a) Schrijf dit systeem in de *control canonical form*. **(4 p)**

Geef de matrices A_c, B_c, C_c, D_c:

$$A_c = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_c = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D_c = 0$$

b) De *control canonical form* is één van de oneindig veel mogelijke toestandsrepresentaties van (1). Toon aan dat het onderstaande toestandsmodel een andere toestandsrepresentaties is van overdrachtsfunctie (1).

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & -2.5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \tag{2}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} x(t)$$

(12 p)

Berekening / motivering: $G(s) = C\,(sI-A)^{-1}B$

$$sI - A = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2{,}5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+1 & 2{,}5 \\ -2 & s \end{pmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)+5} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -2{,}5 \\ 2 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2+s+5} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2s \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{s+2}{s^2+s+5}$$

c) Systeem (2) wordt geregeld door middel van een toestandsregelaar $u(t) = -Kx(t)$. Bereken de feedback versterkingsvector $K = [k_1 \quad k_2]$ zodanig dat de gesloten-lus polen gelijk zijn aan -1 en -2. **(18 p)**

$K = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$

Berekening / motivering:

Gewenst: $s_1 = -1$, $s_2 = -2$

$\Rightarrow (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2 \qquad (a)$

Gesloten-lus karakteristieke polynoom:

$\det(sI - A + BK) =$

$\det\begin{pmatrix} s+1+2k_1 & 2{,}5+2k_2 \\ -2 & s \end{pmatrix} =$

$s^2 + (1+2k_1)s + 5 + 4k_2 \qquad (b)$

Coëfficiënten van (a) en (b) gelijk stellen:

$3 = 1 + 2k_1 \Rightarrow k_1 = 1$

$2 = 5 + 4k_2 \Rightarrow k_2 = -\frac{3}{4}$

$K = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$

Controle:

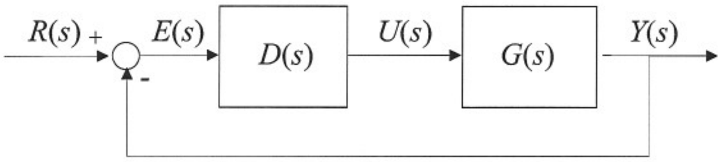
$\det\begin{pmatrix} s+1+2 & 2{,}5-1{,}5 \\ -2 & s \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix}$

$= (s+3)s + 2 = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$

3. Gegeven is het volgende open-lus systeem:

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 1)}$$

Voor dit systeem wordt een regelaar $D(s)$ ontworpen in de gesloten-lus configuratie zoals aangegeven in figuur 2.



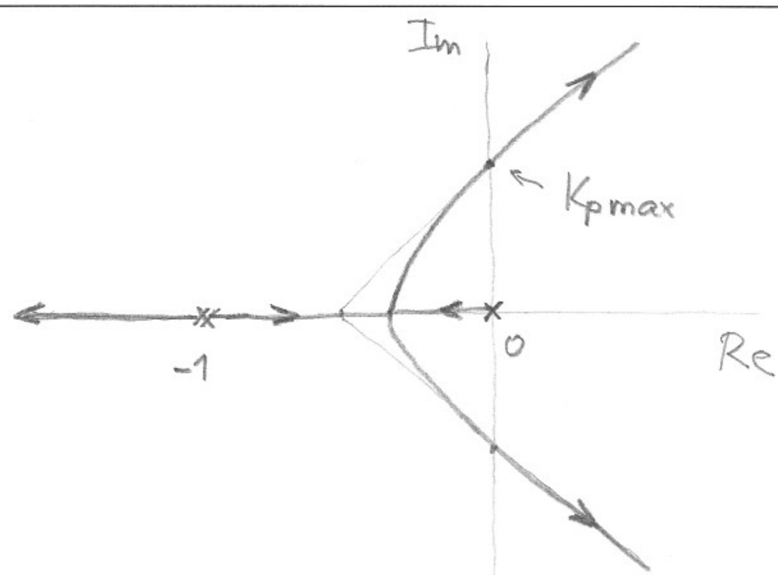
Figuur 2: Blok-schema van de gesloten lus.

a) Veronderstel een proportionele regelaar $D(s) = K_p$, met $K_p > 0$. Geef de gesloten-lus karakteristieke vergelijking in de root-locus vorm en schets de bijbehorende *root locus*. Geef de richting van stijgende K_p aan. Bespreek hoe de stabiliteit van het gesloten-lus systeem wordt beïnvloed door K_p. **(14 p)**

Karakteristieke vergelijking: $1 + K \cdot L(s) = 0$

$$1 + K_p \frac{1}{s(s^2+2s+1)} = 0$$

Root-locus:



Is het gesloten-lus systeem stabiel voor alle $K_p > 0$? Motiveer uw antwoord.

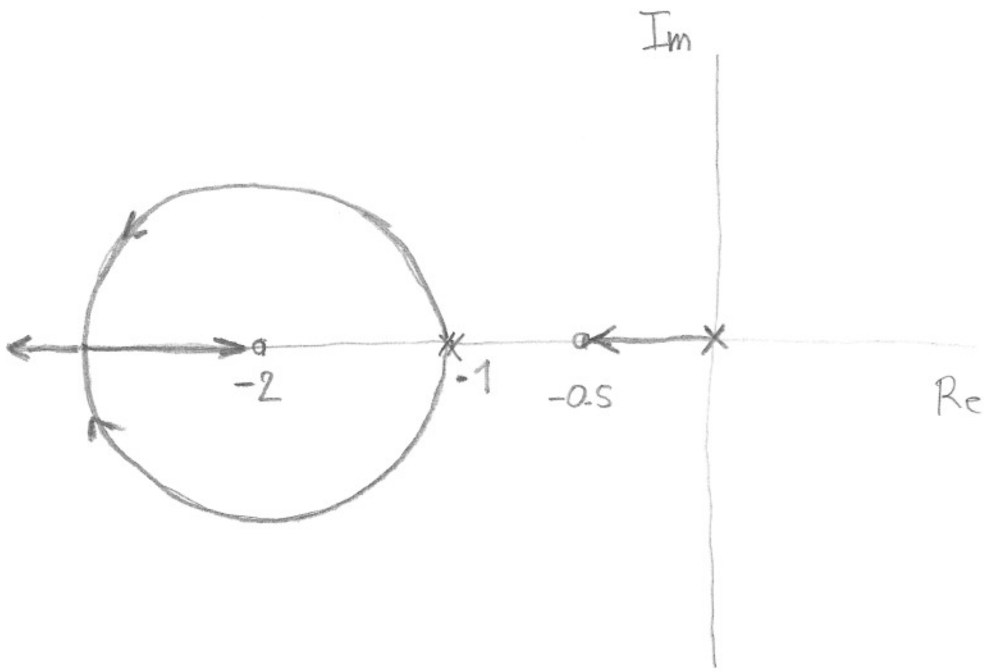
Nee, voor $K_p > K_{p\,max}$ zullen de polen in het rechter-halfvlak komen te liggen.

b) Veronderstel nu de volgende regelaar $D(s) = K_p(s + 0.5)(s + 2)$, met $K_p > 0$. Geef de gesloten-lus karakteristieke vergelijking in de root-locus vorm en schets de bijbehorende *root locus*. Geef de richting van stijgende K_p aan. Bespreek hoe de stabiliteit van het gesloten-lus systeem wordt beïnvloed door K_p. **(14 p)**

Karakteristieke vergelijking: $1 + K \cdot L(s) = 0$

$$1 + K_p \frac{(s+0.5)(s+2)}{s(s^2+2s+1)} = 0$$

Root-locus:



Is het gesloten-lus systeem stabiel voor alle $K_p > 0$? Motiveer uw antwoord.

Ja, de gesloten-lus polen blijven in het linker-halfvlak.

c) Gegeven is de regelaar

$$D(s) = \frac{3s+1}{s}$$

Bereken de overdrachtsfunctie $G_e(s) = \dfrac{E(s)}{R(s)}$ en de *steady-state* waarde e_{ss} voor $r(t) = 2t$ (dwz een *ramp*, met het Laplace beeld: $R(s) = 2/s^2$). NB: de *steady-state* waarde is gedefinieerd als $e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t)$. **(12 p)**

$$G_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s^4+2s^3+s^2}{s^4+2s^3+s^2+3s+1}$$

$$e_{ss} = 0$$

Berekening / motivering:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)\,D(s)} = \frac{1}{1+\dfrac{3s+1}{s^2(s^2+2s+1)}}$$

$$= \frac{s^4+2s^3+s^2}{s^4+2s^3+s^2+3s+1}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\,\frac{E(s)}{R(s)}\cdot\frac{2}{s^2} = \lim_{s\to 0}\frac{2E(s)}{s\,R(s)} = 0$$

Ook: 1 integrator in $G(s)$
1 —"— in $D(s)$

$G(s)\cdot D(s)$ ... type 2 systeem

$\Rightarrow e_{ss} = 0$ voor een ramp $r(t)$

4. Gegeven is het volgende open-lus systeem:

$$G(s) = \frac{50}{(s+3)(s^2+4s+4)}$$

a) Ontwerp een PD regelaar $D(s) = K_p(1 + T_d s)$ zodat het geregelde systeem aan de volgende eisen voldoet:

- een cross-over frequentie van $\omega_c = 4\text{rad/s}$
- een fase marge van $\text{PM} = 60°$

Laat alle stappen uit je berekening zien. **(28 p)**

$$K_p = 1$$

$$T_d = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Berekening / motivering:

$$G(s) = \frac{50}{s^3 + 7s^2 + 16s + 12}$$

$$G(j\omega) = \frac{50}{-j\omega^3 - 7\omega^2 + 16j\omega + 12} = \frac{50}{12 - 7\omega^2 + (16\omega - \omega^3)j}$$

$$\omega = \omega_c = 4 \Rightarrow \frac{50}{12 - 112 + (64-64)j} = -\frac{1}{2}$$

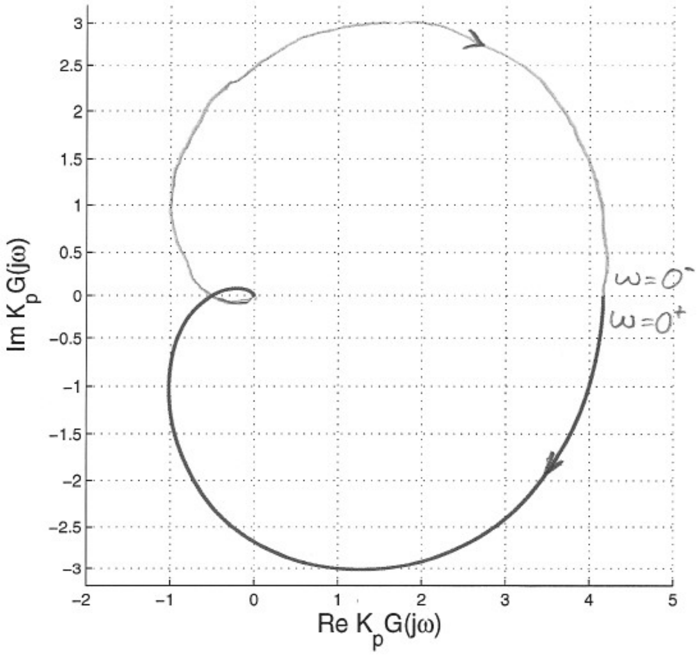
$$|G(j\omega_c)| = \frac{1}{2}, \quad \angle G(j\omega_c) = -180°$$

$$T_d = \frac{\tan 60°}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$1 = K_p \cdot \frac{1}{2} \cdot \left|1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 \cdot j\right|$$

$$K_p = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{1+3}} = 1$$

b) Hieronder is een Nyquist-plot weergegeven van $K_pG(s)$ met $K_p = 1$ voor positieve ω. Maak de Nyquist-plot compleet voor alle waarden van $\omega \in (-\infty, \infty)$. Geef de richting van stijgende ω aan. Pas het Nyquist criterium toe. Is het gesloten-lus systeem stabiel? **(8 p)**



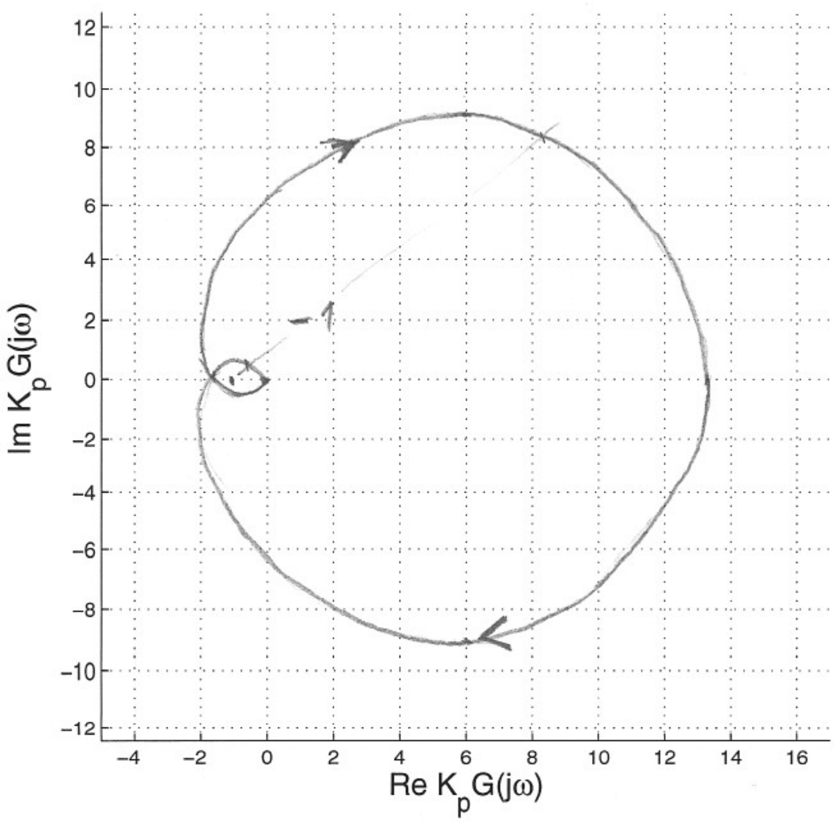
$Z =$ 0

$P =$ 0

$N =$ 0

Stabiel? Ja

c) Schets de Nyquist-plot van $K_pG(s)$ met $K_p = 3$ voor alle waarden van $\omega \in (-\infty, \infty)$. Pas het Nyquist criterium toe. Is het gesloten-lus systeem stabiel? **(8 p)**



$Z =$ 2

$P =$ 0

$N =$ 2

Stabiel? Nee

2 polen in RHP

5. Gegeven is de volgende overdrachtsfunctie:

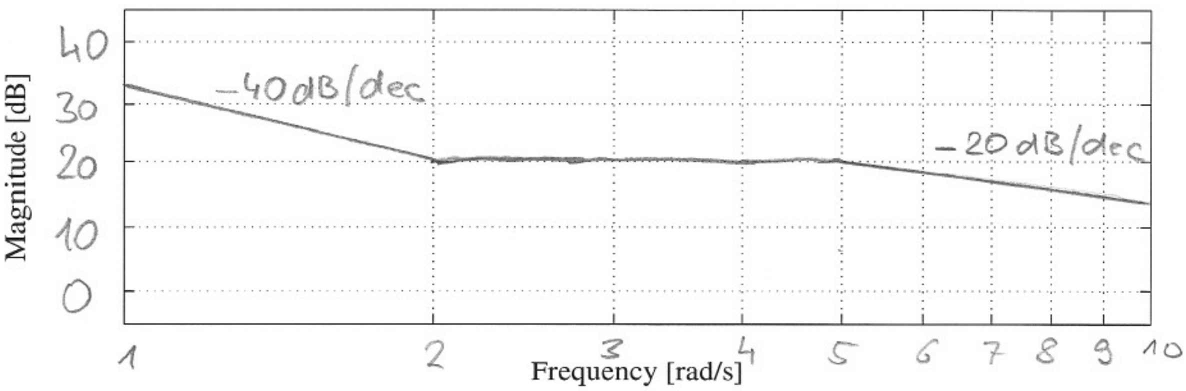
$$G(s) = \frac{50(s+2)^2}{s^2(s+5)}$$

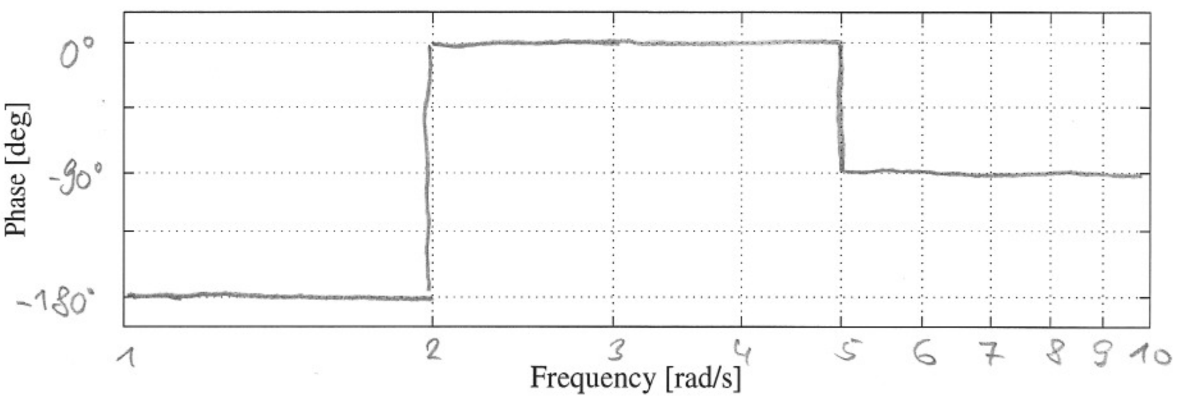
Teken de asymptotenbenadering van het Bode diagram van $G(s)$. Schrijf de overdrachtsfunctie eerst om in een geschikte vorm. Bereken dan de frequenties van de kantelpunten (*breakpoints*). Teken vervolgens nauwkeurig de asymptoten voor zowel de magnitude als de fase plot. Label de assen. **(24 p)**

$$G(j\omega) = \frac{50 \cdot 4 \cdot \left(\frac{j\omega}{2}+1\right)^2}{5 \cdot (j\omega)^2 \left(\frac{j\omega}{5}+1\right)} = \frac{40\left(\frac{j\omega}{2}+1\right)^2}{(j\omega)^2\left(\frac{j\omega}{5}+1\right)}$$

Frequenties van de kantelpunten:

0 (2x pool) , 2 (2x zero) , 5 (1x pool)





Einde tentamen

vraagstuk	1 a	1 b	1 c	1 d	2 a	2 b	2 c	3 a	3 b	3 c	4 a	4 b	4 c	5
score														