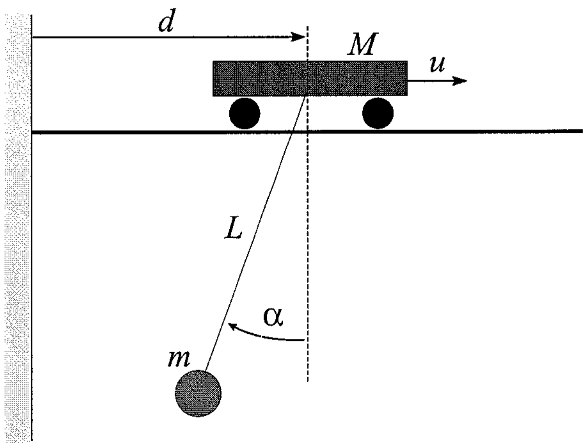
1. Gegeven is een containerkraan model met één ingangssignaal $u(t)$ – de kracht op de kat, en twee gemeten outputs: $d(t)$ – de positie van de kat en $\alpha(t)$ – de hoek van de kabel. Het systeem is schematisch weergegeven in figuur 1.



Figuur 1: Een schema van het te regelen proces.

Dit systeem kan beschreven worden met de volgende (gelineariseerde) vergelijkingen:

$$\begin{aligned} M\ddot{d}(t) &= -mg\alpha(t) + u(t) \\ L\ddot{\alpha}(t) &= \ddot{d}(t) - g\alpha(t) \end{aligned}$$

waarbij we de demping (wrijving) verwaarlozen. De constanten $M, m, L, g \in \mathbb{R}^+$ zijn respectievelijk de massa van de kat, de massa van de container, de lengte van de kabel en de versnelling ten gevolge van de zwaartekracht.

a) Geef de overdrachtsfuncties van het ingangssignaal u naar de hoek α en de afstand d. **(28 p)**

$$G_\alpha(s) = \frac{\alpha(s)}{U(s)} = \frac{1}{MLs^2 + (M+m)g}$$

$$G_d(s) = \frac{D(s)}{U(s)} = \frac{Ls^2 + g}{MLs^4 + (M+m)gs^2}$$

z.o.z.

Berekening / motivering:

$$Ms^2 D(s) = -mg\,\alpha(s) + U(s)$$
$$Ls^2 \alpha(s) = s^2 D(s) - g\,\alpha(s)$$

$$(Ls^2+g)\,\alpha(s) = s^2 D(s)$$
$$\alpha(s)\, M(Ls^2+g) = -mg\,\alpha(s) + U(s)$$
$$\alpha(s)\,(MLs^2 + Mg + mg) = U(s)$$
$$\frac{\alpha(s)}{U(s)} = \frac{1}{MLs^2+(M+m)g}$$

$$D(s) = \frac{Ls^2+g}{s^2}\cdot \alpha(s)$$
$$= \frac{Ls^2+g}{s^2}\cdot \frac{1}{MLs^2+(M+m)g}\cdot U(s)$$

$$\frac{D(s)}{U(s)} = \frac{Ls^2+g}{MLs^4+(M+m)gs^2}$$

b) Is dit systeem stabiel? Motiveer uw antwoord! **(6 p)**

Nee, het systeem is niet stabiel.

$\frac{\alpha(s)}{U(s)}$ is wel marginaal stabiel,

$\frac{D(s)}{U(s)}$ is niet stabiel (2x pool in 0)

c) De gemeten outputs zijn de positie van de kat $d(t)$ en de hoek van de kabel $\alpha(t)$. Definier de toestandsvector als $x = (d,\ \alpha,\ \dot{d},\ \dot{\alpha})^T$ en schrijf het systeem in toestandsvorm. **(28 p)**

Geef de matrices A, B, C, D:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -mg/M & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(M+m)g}{ML} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/M \\ 1/ML \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) Voor concrete numerieke waarden van de parameters M, m, L en g, de volgende overdracht functie is verkregen:

$$G_d(s) = \frac{D(s)}{U(s)} = \frac{s^2+1}{s^2(s^2+5)}$$

Schrijf dit systeem in de *control canonical form.* **(12 p)**

Geef de matrices A_c, B_c, C_c, D_c:

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D_c = 0$$

2. Gegeven is de volgende overdrachtsfunctie:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$$

a) Bereken de stationaire versterking (*DC gain*), de polen en nulpunten, de relatieve demping ζ en de natuurlijke frequentie ω_n. **(12 p)**

DC gain = 0.2

polen = $-1 \pm 2j$

nulpunten = geen

$\zeta = 1/\sqrt{5}$

$\omega_n = \sqrt{5}$ rad/s

Berekening / motivering:

polen: $-1 \pm \frac{\sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2j$

systeem stabiel, dus

DC gain $= G(0) = \frac{1}{5}$

$$\left.\begin{matrix}\zeta \\ \omega_n\end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} s^2 + 2s + 5 \\ s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \end{matrix}$$

$\Rightarrow \omega_n^2 = 5 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{5}$

$2\zeta\sqrt{5} = 2$

$\zeta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

b) Bij welke positieve frequentie ω is de fase van $G(j\omega)$ gelijk aan $-90°$? **(8 p)**

$\omega = \sqrt{5}$ rad/s

Berekening / motivering:

$$G(j\omega) = \frac{1}{5-\omega^2+2j\omega} = \frac{A}{B}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle A - \angle B = 0 - \angle B$$

$$\Rightarrow \angle B = 90° \Rightarrow Re(B) = 0$$

$$5-\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = 5 \Rightarrow \omega = \sqrt{5}$$

c) Bij welke positieve frequenties is de magnitude van $G(j\omega)$ gelijk aan 0.2 (-13.97 dB)? **(8 p)**

$\omega_1 = 0$ rad/s $\qquad \omega_2 = \sqrt{6}$ rad/s

Berekening / motivering:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{|5-\omega^2+2j\omega|} = \frac{1}{5}$$

$$(5-\omega^2)^2 + (2\omega)^2 = 25$$

$$25 - 10\omega^2 + \omega^4 + 4\omega^2 = 25$$

$$\omega^4 - 6\omega^2 = 0$$

$$\omega_1 = 0$$

$$\omega_2 = \sqrt{6}$$

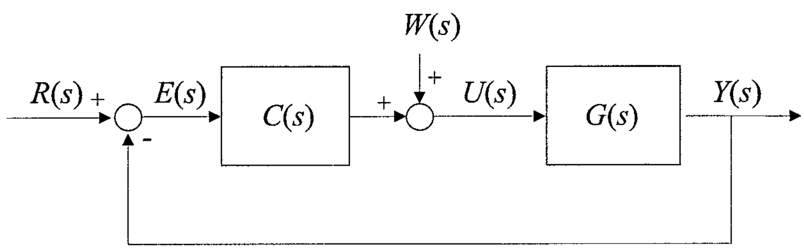
3. Een proces beschreven door de onderstaande overdrachtsfunctie

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s}{(s+3)(s^2+9)}$$

wordt geregeld met een PD regelaar

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_d s$$

zoals weergegeven in figuur 2. In dit schema is $W(s)$ een constante verstoring met een onbekende amplitude.



Figuur 2: Gesloten-lus regelschema.

a) Veronderstel dat $K_p > 0$, $K_d = 0$, $r(t) = 0$ en $w(t) \neq 0$, $\forall t$. Geef de overdrachtsfunctie $G_w(s)$ van de verstoring $W(s)$ naar de regelfout $E(s)$. **(16 p)**

$$G_w(s) = \frac{E(s)}{W(s)} = \frac{-s}{s^3 + 3s^2 + (9+K_p)s + 27}$$

Berekening / motivering:

$$G_w(s) = \frac{-G(s)}{1 + G(s)C(s)} = \frac{\dfrac{-s}{(s+3)(s^2+9)}}{1 + \dfrac{K_p s}{(s+3)(s^2+9)}}$$

$$= \frac{-s}{(s+3)(s^2+9) + K_p s} =$$

$$= \frac{-s}{s^3 + 3s^2 + (9+K_p)s + 27}$$

b) Veronderstel dat $w(t) = 0, \forall t$. Bereken K_p en K_d zodanig dat de gesloten-lus karakteristieke polynoom (*closed-loop characteristic polynomial*) gelijk is aan $d(s) = (s+3)(s^2+5s+9)$. **(16 p)**

$K_p = 15$

$K_d = 5$

Berekening / motivering: $1 + G(s)C(s) = 0$

$$1 + \frac{K_p s + K_d s^2}{s^3 + 3s^2 + 9s + 27} = 0$$

$$s^3 + (3 + K_d)s^2 + (9 + K_p)s + 27 = 0$$

gewenst:

$$s^3 + 8s^2 + 24s + 27 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} 3 + K_d &= 8 \\ 9 + K_p &= 24 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} K_d &= 5 \\ K_p &= 15 \end{aligned}$$

c) Veronderstel dat K_p en K_d zodanig gekozen zijn dat de gesloten-lus stabiel is. Bereken de *steady-state* waarde y_{ss} voor $w(t) = 0$ en $r(t) = 1, \forall t$. (De *steady-state* waarde is gedefinieerd als $y_{ss} = \lim_{t\to\infty} y(t)$.) **(8 p)**

$y_{ss} = 0$

Berekening / motivering:

$$G_{ce}(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)} = \frac{K_p s + K_d s^2}{\ldots}$$

$$y_{ss} = \lim_{s\to 0} s\, G_{ce}(s) \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} G_{ce}(s) = 0$$

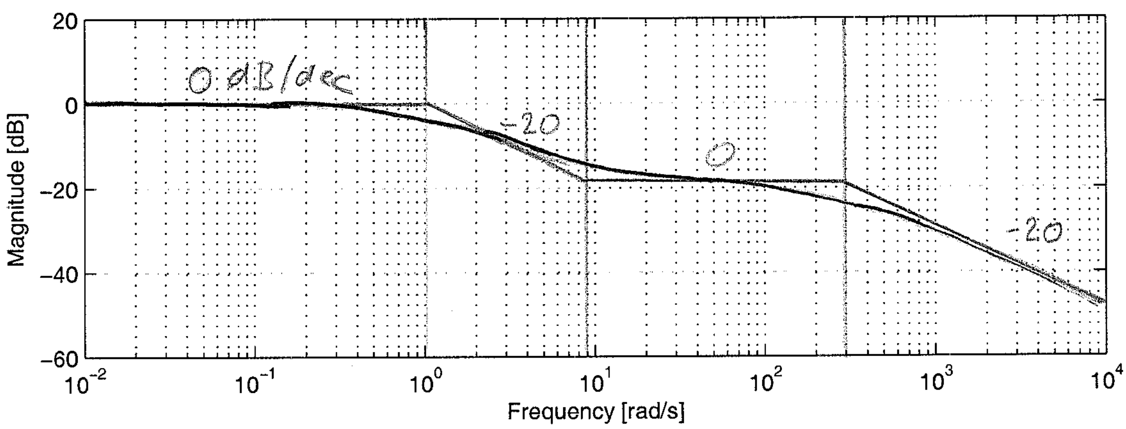
4. Gegeven is de volgende overdrachtsfunctie:

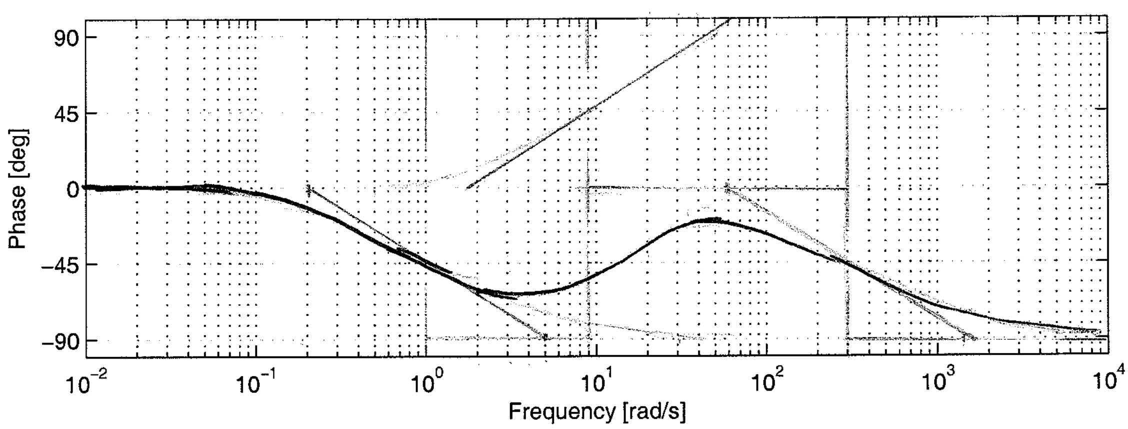
$$G(s) = \frac{100s + 900}{3(s+1)(s+300)}$$

Teken de Bode-plot van $G(s)$. Teken eerst nauwkeurig de asymptoten voor zowel de magnitude als de fase plot en schets daarna de werkelijke vorm van de grafiek. **(26 p)**

Bereken eerst de frequenties van de kantelpunten (*breakpoints*) en de stationaire versterking (*DC gain*) van $G(s)$.

Frequenties van de kantelpunten:	1 rad/s : pool 9 rad/s : nulpunt 300 rad/s : pool
Stationaire versterking: 1	



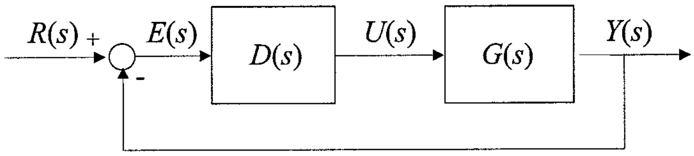


1 pool   9 nulpunt   300 pool

5. Gegeven is het volgende open-loop systeem:

$$G(s) = \frac{5(s-1)}{(s+2)(s+5)}$$

Voor dit systeem wordt een regelaar $D(s)$ ontworpen in de gesloten-lus configuratie zoals aangegeven in figuur 3. Veronderstel een proportionele regelaar $D(s) = K_p$, met $K_p > 0$.

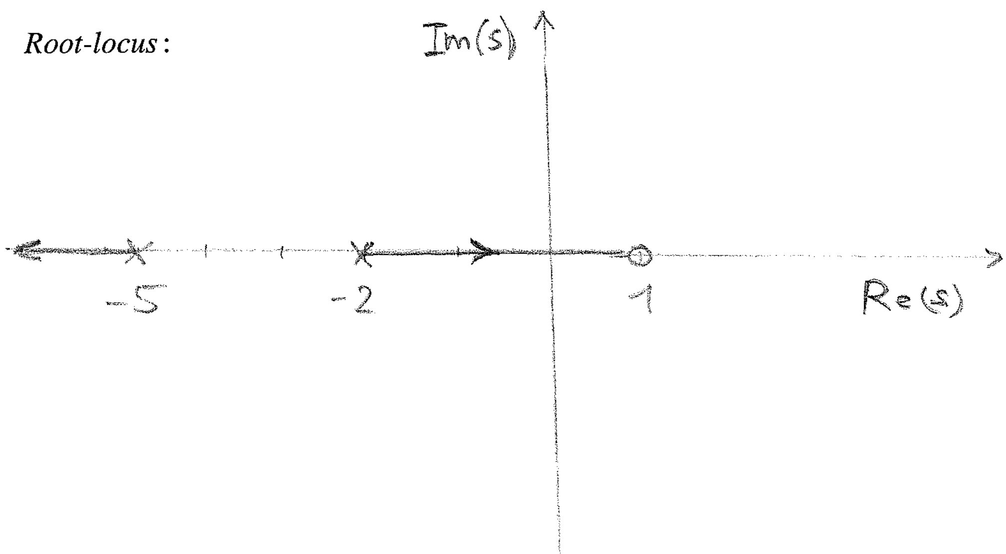


Figuur 3: Blok-schema van de gesloten lus.

a) Geef de gesloten-lus karakteristieke vergelijking in de root-locus vorm en schets de *root locus* voor dit gesloten-lus systeem. Geef de richting van stijgende K_p aan. **(12 p)**

Karakteristieke vergelijking: $1 + K_p \frac{5(s-1)}{(s+2)(s+5)} = 0$

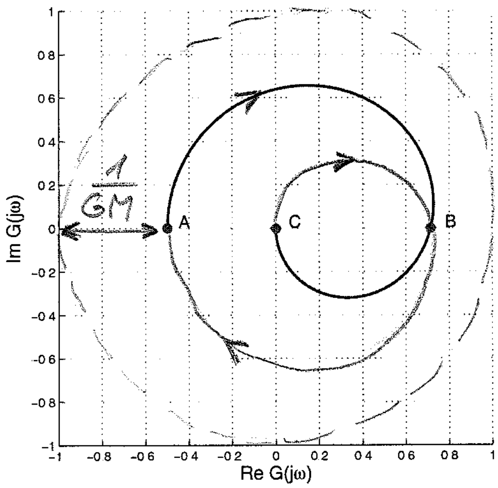
Root-locus:



Wordt het gesloten-lus systeem stabiel voor alle $K_p > 0$? Motiveer uw antwoord.

Nee; een deel van de root-locus ligt in het rechter halfvlak. Voor $K_p > K_{po}$ wordt het gesloten-lus systeem instabiel.

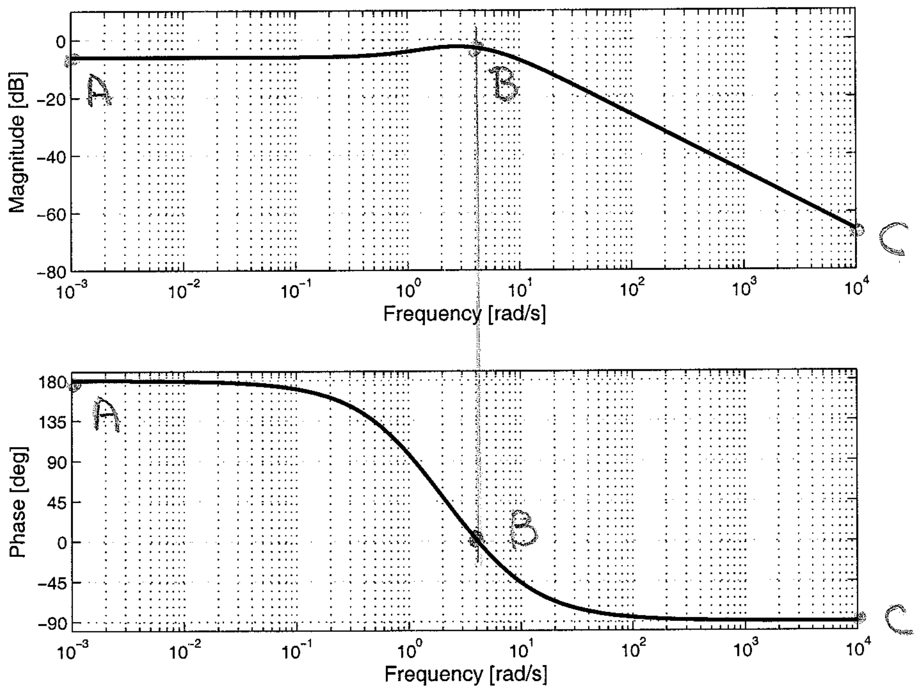
(b) Hieronder is een Nyquist-plot van $G(j\omega)$ weergegeven voor positieve ω. Maak de Nyquist-plot compleet voor alle waarden van $\omega \in (-\infty, \infty)$. Geef de richting van stijgende ω aan. Waar is de *gain margin* af te lezen in deze Nyquist-plot? Bereken de gain *gain margin* (GM) en de *phase margin* (PM). **(12 p)**



GM = 2 (6 dB)

PM = ∞

(c) In de bovenstaande Nyquist-plot zijn punten A, B en C gemarkeerd. Geef aan in de bijbehorende Bode-plot hieronder waar deze punten liggen op de magnitude en fase plot. **(8 p)**



Einde tentamen

vraagstuk	1 a	1 b	1 c	1 d	2 a	2 b	2 c	3 a	3 b	3 c	4	5 a	5 b	5 c
score														