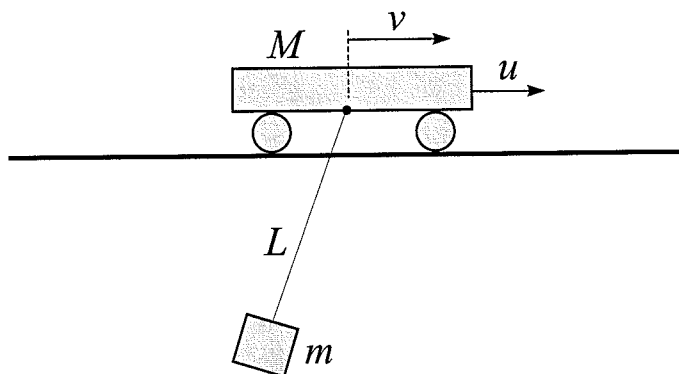


1. Gegeven is een containerkraan model met ééningangssignaal $u(t)$ – de kracht op de kat, en één gemeten output: $v(t)$ – de snelheid van de kat. Het systeem is schematisch weergegeven in figuur 1. De constanten $M, m, L, g \in \mathbb{R}^+$ zijn respectievelijk de massa van de kat, de massa van de container, de lengte van de kabel en de versnelling ten gevolge van de zwaartekracht.



Figuur 1: Een schema van het te regelen proces.

Van een gelineariseerd model (waarin we de wrijving verwaarlozen) is de volgende overdracht functie verkregen:

$$G(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{Ls^2 + g}{MLs^3 + (M + m)gs}$$

- a) Geef de bijbehorende differentiaalvergelijking en schrijf dit systeem in de *control canonical form*. **(20 p)**

Differentiaal vergelijking:

$$ML \ddot{v}(t) + (M+m)g \dot{v}(t) = L \ddot{u}(t) + g u(t)$$

Geef de matrices A_c, B_c, C_c, D_c :

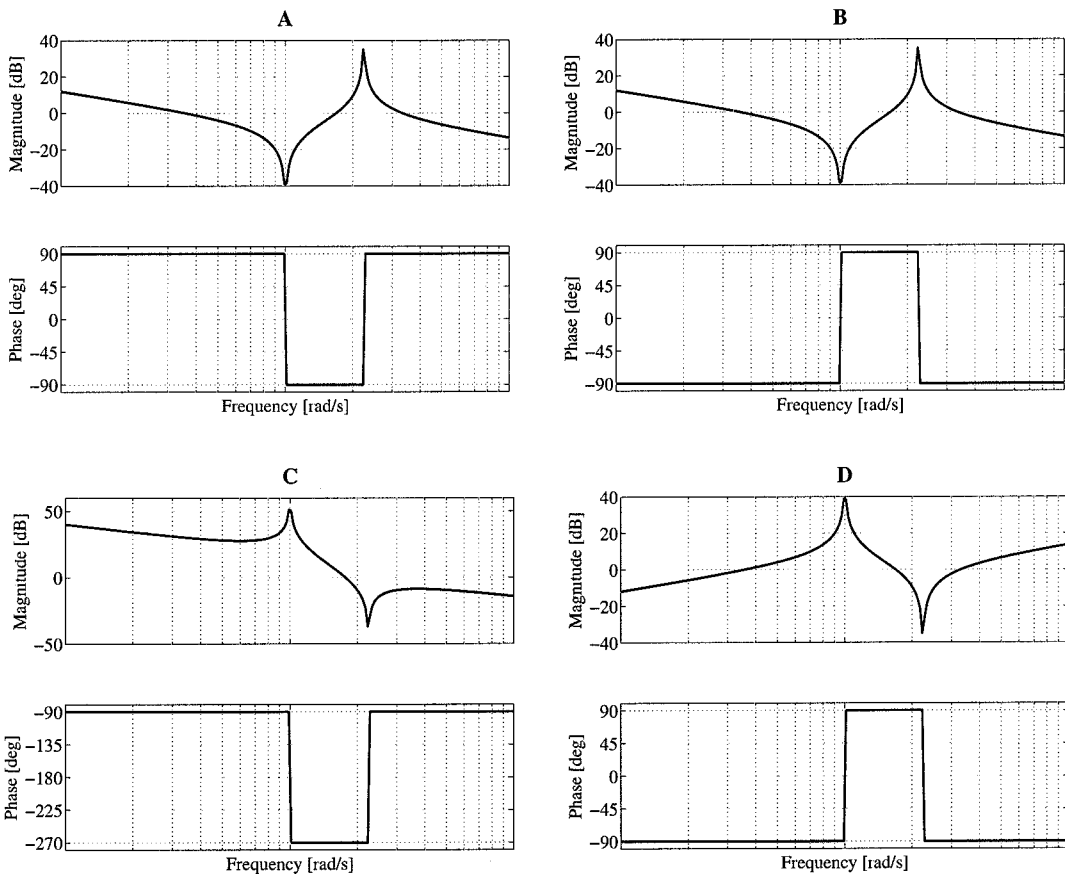
$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{(m+M)g}{ML} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_c = \begin{pmatrix} \frac{1}{M} & 0 & \frac{g}{ML} \end{pmatrix} \quad D_c = 0$$

- b) Bereken de stationaire versterking (DC gain), de polen en nulpunten, de natuurlijke frequentie ω_n en de relatieve demping ζ van de complexe polen van G . (12 p)

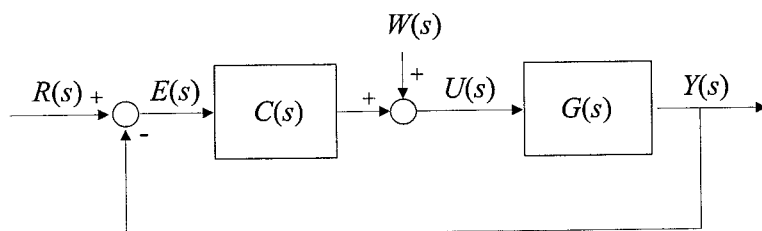
$$\begin{aligned} \text{DC gain} &= \infty \\ \text{polen} &= 0, \pm j \sqrt{\frac{(M+m)g}{ML}} \quad \text{nulpunten} = \pm j \sqrt{\frac{g}{L}} \\ \omega_n &= \sqrt{\frac{(M+m)g}{ML}} \text{ rad.s}^{-1} \quad \zeta = 0 \end{aligned}$$

- c) Welke van de onderstaande vier grafieken is het correcte Bode diagram voor $G(s)$? Geef het correcte antwoord en de motivering. (14 p)



Grafiek B is juist, omdat ... $\omega_{\text{zero}} < \omega_n \Rightarrow$ eerst komt de anti-resonantie piek (A of B)
 Het Bode diagram A is fout, de fase komt niet overeen met de magnitude (-20 dB/dec \Rightarrow -90° en niet +90°)

- d) De kat snelheid wordt geregeld met een proportionele regelaar $C(s) = K_p$, zoals weergegeven in figuur 2. In dit schema is $W(s)$ een constante verstoring met een onbekende amplitude (bijv. wind).



Figuur 2: Gesloten-lus regelschema.

Veronderstel dat $r(t) = 0$ en $w(t) \neq 0, \forall t$. Geef de overdrachtsfunctie $G_w(s)$ van de verstoring $W(s)$ naar de regelfout $E(s)$ en bereken de *steady-state* waarde e_{ss} voor $w(t) = 3$. (De *steady-state* waarde is gedefinieerd als $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$.) (14 p)

$$G_w(s) = \frac{E(s)}{W(s)} = \frac{-G(s)}{1 + G(s)C(s)} = \frac{-Ls^2 - g}{MLs^3 + (M+m)gs + K_p(Ls^2 + g)}$$

$$e_{ss} = -\frac{3}{K_p}$$

Berekening / motivering:

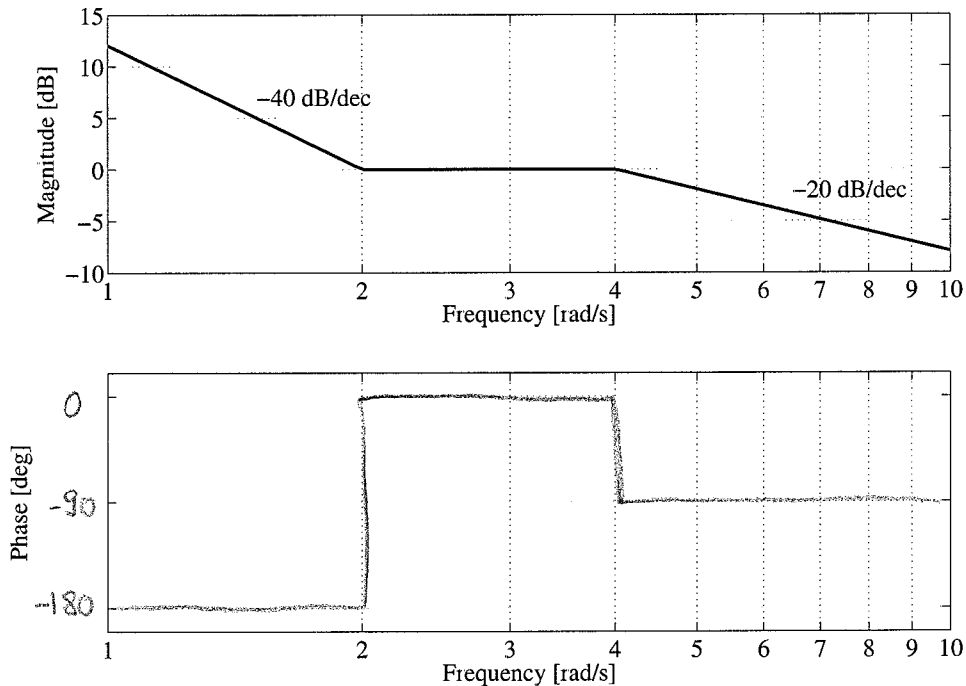
$$\frac{-G(s)}{1 + G(s)C(s)} = \frac{-(Ls^2 + g)}{MLs^3 + (M+m)gs}$$

$$= \frac{-(Ls^2 + g)}{1 + \frac{Ls^2 + g}{MLs^3 + (M+m)gs} \cdot K_p}$$

$$= \frac{-Ls^2 - g}{MLs^3 + (M+m)gs + K_p(Ls^2 + g)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s G_w(s) \cdot \frac{3}{s} = -\frac{3g}{K_p g} = -\frac{3}{K_p}$$

2. Gegeven is de onderstaande asymptotenbenadering van de magnitude van het Bode diagram voor een minimum-fase systeem met overdracht functie $G(s)$. Dit systeem heeft geen complexe polen of nulpunten en geen polen in het rechter halfvlak.



Figuur 3: Asymptotenbenadering van het Bode diagram.

- a) Bepaal de orde van het systeem, het aantal polen, het aantal nulpunten, de overdracht functie $G(s)$ en bepaal of het systeem stabiel, marginaal stabiel of instabiel is. (10 p)

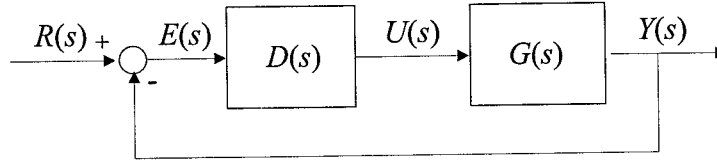
Orde van het systeem	=	3
Aantal polen	=	3
Aantal nulpunten	=	2
Overdracht functie $G(s)$	=	$\frac{4(s+2)^2}{s^2(s+4)} = \frac{4(0.5s+1)^2}{s^2(0.25s+1)}$
Stabiliteit van het systeem:		instabiel (2x pool in 0)

- b) Teken in figuur 3 nauwkeurig de asymptoten van de bijbehorende fase plot. Geef de fase in graden langs de verticale as. (6 p)

3. Gegeven is het volgende open-loop systeem:

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

Voor dit systeem wordt een regelaar $D(s)$ ontworpen in de gesloten-lus configuratie zoals aangegeven in figuur 4.



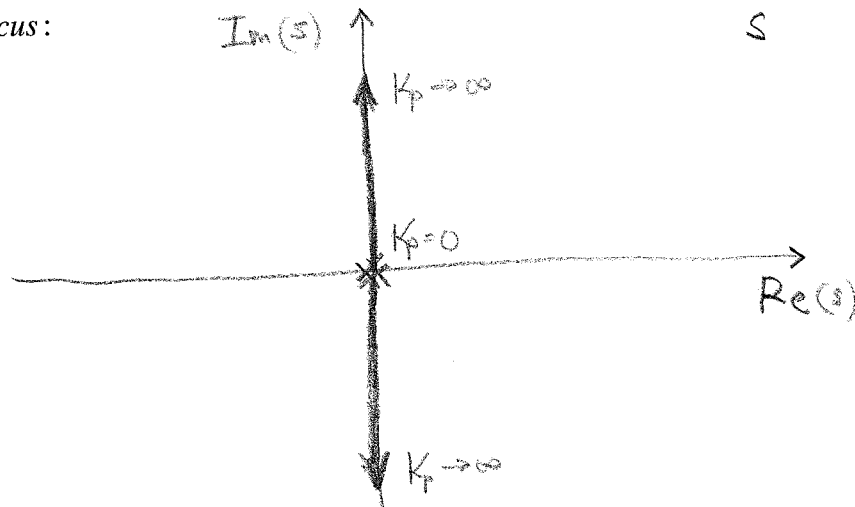
Figuur 4: Blok-schema van de gesloten lus.

- a) Veronderstel een proportionele regelaar $D(s) = K_p$, met $K_p > 0$. Geef de gesloten-lus karakteristieke vergelijking in de *root-locus* vorm en schets de bijbehorende *root locus*. Geef de richting van stijgende K_p aan. Bespreek hoe de stabiliteit van het gesloten-lus systeem wordt beïnvloed door K_p . (12 p)

Karakteristieke vergelijking:

$$1 + K_p \cdot \frac{1}{s^2} = 0$$

Root-locus:

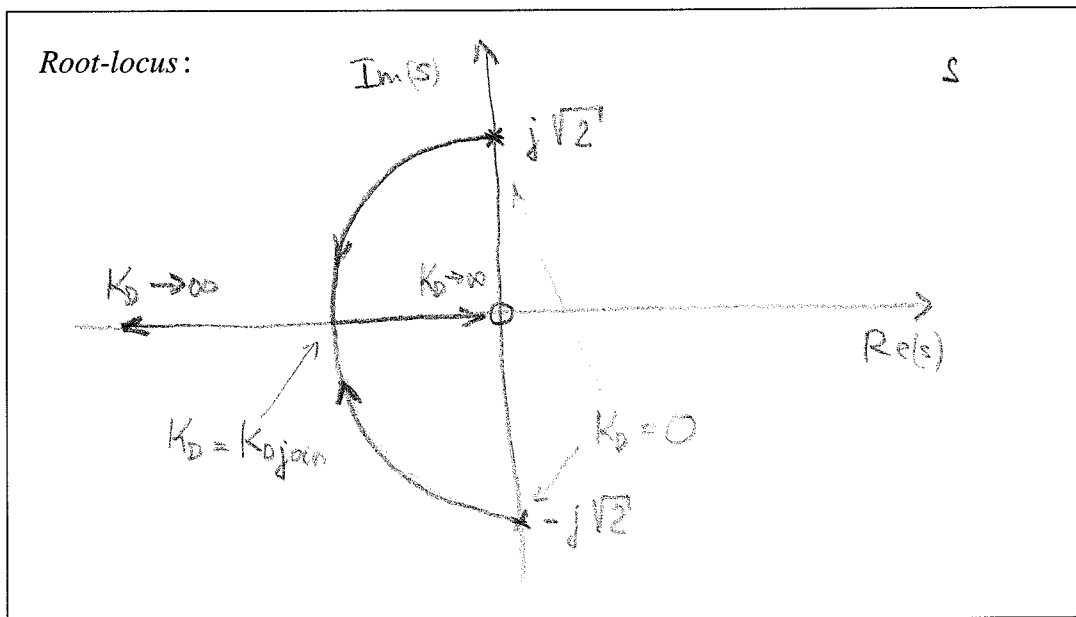


Is het gesloten-lus systeem asymptotisch stabiel voor alle $K_p > 0$?
Motiveer uw antwoord.

Nee, het systeem is alleen marginaal stabiel voor alle $K_p > 0$.

- b) Veronderstel nu een PD regelaar $D(s) = 2 + K_d s$, met $K_d > 0$. Geef de gesloten-lus karakteristieke vergelijking in de *root-locus* vorm en schets de bijbehorende *root locus*. Geef de richting van stijgende K_d aan. Bespreek hoe de prestatie van het gesloten-lus systeem wordt beïnvloed door K_d . (20 p)

Karakteristieke vergelijking: $1 + K_D \frac{s}{s^2 + 2} = 0$
 $(1 + \frac{2 + K_D s}{s^2} = 0 \Rightarrow s^2 + 2 + K_D s = 0 \Rightarrow)$



Hoe wordt de prestatie van het gesloten-lus systeem beïnvloed door K_d ?

$K_D \rightarrow 0$ ---- $\xi \rightarrow 0$, oscillaties, polen $\pm j\sqrt{2}$

$0 < K_D \leq K_{Djain}$ --- complexe polen, $0 < \xi \leq 1$
 $\xi \rightarrow 1$ betere damping,
 minder oscillaties

$K_{Djain} < K_D < \infty$... geen oscillaties, maar
 respons steeds trager
 voor $K_D \rightarrow \infty$ (pool $\rightarrow 0$)

- c) Veronderstel nu de PD regelaar $D(s) = 6 + 3s$. Teken de asymptotenbenadering van de magnitude en fase van het Bode diagram voor de *loop-transfer function* $L(s) = G(s)D(s)$. Label de assen. Bereken de *crossover* frequentie en de fase marge van $L(s)$. (30 p)

$$\text{Loop-transfer functie } L(s) = \frac{6+3s}{s^2} = \frac{3(2+s)}{s^2}$$

$$\text{Frequenties van de kantelpunten: } \omega_1 = 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ (nul/punt)}$$

$$\text{Crossover frequentie } \omega_c = 2\sqrt{3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{Fase marge} = 60^\circ$$

Berekening / motivering voor ω_c en de fase marge:

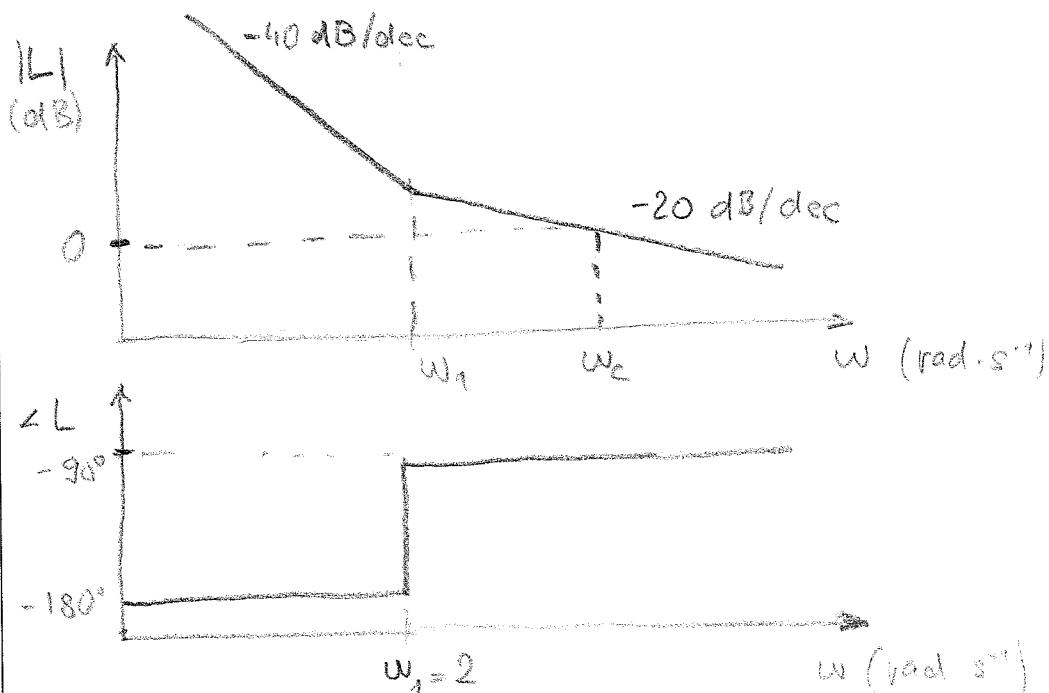
$$\frac{|6 + 3j\omega_c|}{|- \omega_c^2|} = 1 \Rightarrow 36 + 9\omega_c^2 = \omega_c^4 \Rightarrow \omega_c = \sqrt[4]{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\angle L(j\omega_c) = \tan^{-1} \frac{3\omega_c}{6} - 180^\circ$$

$$= \tan^{-1} \sqrt{3} - 180^\circ = -120^\circ$$

$$\Rightarrow \text{PM} = 60^\circ$$

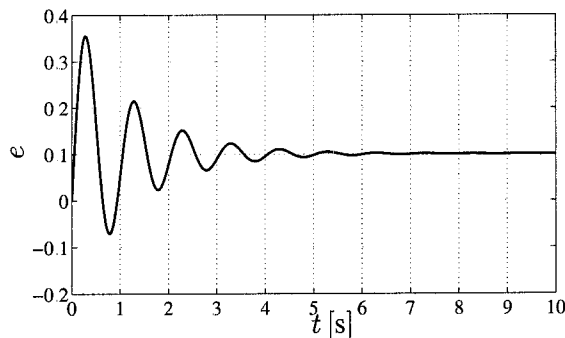
Bode diagram voor $L(s)$ (asymptotenbenadering, geef de helling in dB/dec aan):



4. Een servosysteem wordt geregeld in de gesloten-lus configuratie zoals aangegeven in figuur 4. Het systeem $G(s)$ is beschreven met de volgende overdracht functie:

$$G(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)},$$

waarbij de exacte waarden van parameters K en τ onbekend zijn. Om deze waarden te bepalen, wordt een gesloten-lus experiment uitgevoerd met een proportionele regelaar $D(s) = 1$. Op de referentie input $r(t)$ wordt een ramp signaal $r(t) = 2t$ gezet en de bijbehorende output $y(t)$ wordt gemeten. Het foutsignaal $e(t) = r(t) - y(t)$ is weergegeven in figuur 5.



Figuur 5: Gemeten foutsignaal $e(t)$.

Een van de parameters K en τ kan op basis van de gegeven informatie nauwkeurig worden berekend. Bereken deze parameter en stel een ander experiment voor om de tweede parameter te kunnen bepalen. (26 p)

De transient respons is beschreven door een complexe functie, maar er is duidelijk een steady state fout: $e_{ss} = 0.1$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(\tau s + 1)s}{s(\tau s + 1) + K} \cdot \frac{2}{s^2} = \frac{2}{K} \Rightarrow K = 20$$

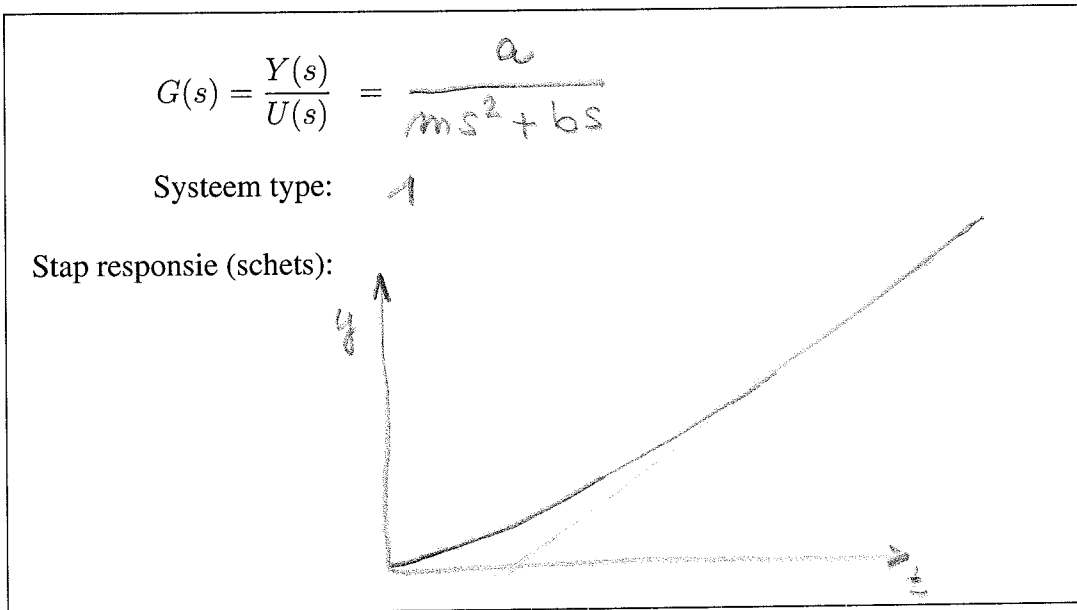
τ kunnen we eenvoudig bepalen van een open-loop step-respons van $u(t)$ naar $y(t)$.

5. Een *open-loop* bewegingsmodel van een robot arm (met één vrijheidsgraad) is gegeven door:

$$m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) = au(t),$$

met $m > 0$ de totale massa van de arm en de te dragen last, $b > 0$ de demping coefficient (wrijving in de lagers en de actuatoren) en $a > 0$ de versterking behorende bij de regel input u (de spanning op de DC motor, gekoppeld aan de robot). Een proportionele regelaar $u(t) = K(y_{ref}(t) - y(t))$ met $K > 0$ wordt gebruikt om de positie y te regelen, dusdanig dat het een gegeven referentie y_{ref} goed volgt.

- a) Leidt de *open-loop* overdracht functie $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ af. Schets de stap responsie van dit open-lus systeem. Wat is het type van dit systeem? Motiveer uw antwoord. (8 p)



- b) Bepaal de differentiaal vergelijking van het gesloten-lus gedrag en leidt de gesloten-lus overdracht functie $H(s) = \frac{Y(s)}{Y_{ref}(s)}$ af. Beïnvloedt de *gain* K de *steady-state* fout $e_{ss} = y_{ref} - y_{ss}$ voor $y_{ref}(t) = \text{const} \neq 0$? Is het nodig een integraal actie (bijv. een PI regelaar) te gebruiken? Licht uw antwoord toe. (16 p)

Differentiaal vergelijking: $m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + aKy(t) = aKy_{ref}(t)$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{Y_{ref}(s)} = \frac{Ka}{ms^2 + bs + aK}$$

Invloed van K op e_{ss} en het nut van een integraal actie:

in ss $\ddot{y}(t) = \dot{y}(t) = 0 \Rightarrow aKy(t) = aKy_{ref}(t)$

I-actie is niet nodig. $\Rightarrow y(t) = y_{ref}(t)$
 K heeft geen invloed.

