Schriftelijke zitting Systeem- en regeltechniek 2 (WB2207)

31 oktober 2006 van 14:00 tot 17:00 uur

Onderstaande aanwijzingen nauwkeurig lezen.

- Vul op het voorblad uw naam, voorletters, studienummer en opleiding in.
- Dit tentamen bestaat uit 5 vraagstukken. Lees iedere vraag goed alvorens te antwoorden.
- Bij elke vraag staat het maximaal te behalen aantal punten aangegeven (totaal = 200).
- Het is **niet** toegestaan om boeken en oude tentamens te gebruiken. Het gebruik van uw eigen *handgeschreven* notes en college sheets is wel toegestaan.
- Het antwoord van elk vraagstuk dient in het bijbehorende kader te worden ingevuld. Bij de beoordeling van het werk telt de uitkomst van een opgave slechts mee wanneer deze is voorzien van een motivering die tot de uitkomst heeft geleid.
- Praat nooit met uw buurman om welke reden dan ook: het tentamen wordt in dit geval meteen ingenomen.
- Wilt u het 'Tentamenfeedbackformulier' na afloop invullen en samen met uw uitwerking inleveren? Bij voorbaat dank.
- Veel succes!

Achternaam:

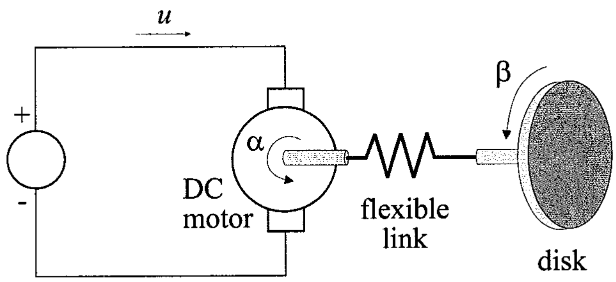
Voorletters:

Studienummer:

Opleiding:

Delft University of Technology, Delft Center for Systems and Control, Mekelweg 2, Delft

1. Een DC motor is gekoppeld aan een schijf via een flexibele as (gemodeleerd als een veer), zoals afgebeeld in figuur 1. Het doel is om de hoek van de schijf te regelen. Dit probleem is een vereenvoudigde versie van typische positie-regelingen in robotica en ruimtevaart toepassingen.



Figuur 1: Een schema van het te regelen proces.

Het systeem heeft één ingangssignaal $u(t)$ – de stroom door de motor, en één gemeten output $y(t) = \beta(t)$, de hoek van de schijf. Een wiskundig model van dit systeem is:

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha}(t) &= u(t) - k(\alpha(t) - \beta(t)) \\ \ddot{\beta}(t) &= k(\alpha(t) - \beta(t))\end{aligned}$$

waar we de demping (wrijving) verwaarlozen. De constante $k > 0$, $k \in \mathbb{R}$ vertegenwoordigt de stijfheid van de veer en $\alpha(t)$ is de hoek van de motor as.

a) Geef de overdrachtsfuncties van het ingangssignaal u naar de hoeken α en β. Geef ook de overdrachtsfuncties van u naar de hoeksnelheden α_v en β_v. **(30 p)**

$$G_\alpha(s) = \frac{\alpha(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + k}{s^2(s^2+2k)}$$

$$G_\beta(s) = \frac{\beta(s)}{U(s)} = \frac{k}{s^2(s^2+2k)}$$

$$G_{\alpha v}(s) = \frac{\alpha_v(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + k}{s(s^2+2k)}$$

$$G_{\beta v}(s) = \frac{\beta_v(s)}{U(s)} = \frac{k}{s(s^2+2k)}$$

Berekening / motivering: $s^2\alpha(s) = U(s) - k\alpha(s) + k\beta(s)$

$$s^2\beta(s) = k\alpha(s) - k\beta(s)$$

$$(s^2+k)\alpha(s) = U(s) + k\beta(s)$$

$$(s^2+k)\beta(s) = k\alpha(s) \Rightarrow \beta(s) = \frac{k\alpha(s)}{s^2+k}$$

$$(s^2+k)^2\alpha(s) = (s^2+k)U(s) + k^2\alpha(s)$$

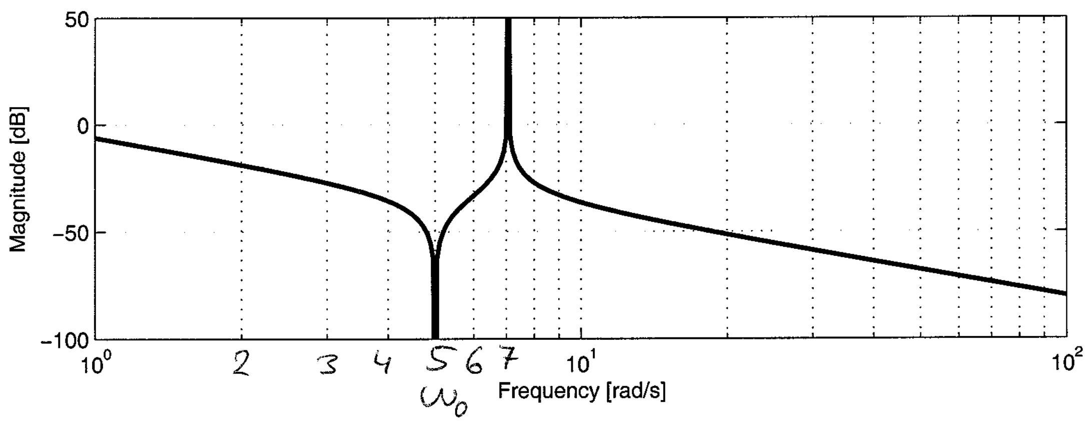
$$(s^4+2ks^2)\alpha(s) = (s^2+k)U(s)$$

$$\frac{\alpha(s)}{U(s)} = \frac{s^2+k}{s^2(s^2+2k)}$$

$$\beta(s) = \frac{k}{s^2+k}\cdot\alpha(s) = \frac{k}{s^2+k}\cdot\frac{s^2+k}{s^2(s^2+2k)}U(s)$$

$$\frac{\beta(s)}{U(s)} = \frac{k}{s^2(s^2+2k)} \quad \Big| \quad \alpha_v(s) = s\alpha(s),\ \beta_v(s) = s\beta(s)$$

b) Een magnitude-plot van één van de overdrachtsfuncties van punt a) is weergegeven in figuur 2. Voor welke overdrachtsfunctie is deze plot gemaakt en welke waarde heeft de constante k? **(12 p)**



Figuur 2: De gegeven magnitude Bode-plot.

Overdrachtsfunctie: $G_\alpha(s) = \dfrac{s^2+k}{s^2(s^2+2k)}$

$k =$ 25 rad/s

Berekening / motivering: voor $\omega = 1$ rad/s en lager $\rightarrow -40$ dB/dec $\Rightarrow \frac{1}{s^2} \cdots$

zowel polen als nulpunten $\Rightarrow G_\alpha(s)$

$s^2 + \omega_0^2 = s^2 + k$ (nulpunt)

$k = \omega_0^2 = 5^2 = 25$

c) De gemeten output is de hoek α. Definier de toestand als $x = (\alpha, \ \beta, \ \dot{\alpha}, \ \dot{\beta})^T$ en schrijf het systeem in toestandsvorm. **(20 p)**

Geef de matrices A, B, C, D:

$x_1 = \alpha$, $\dot{x}_1 = \dot{\alpha} = x_3$

$x_2 = \beta$, $\dot{x}_2 = \dot{\beta} = x_4$

$\dot{x}_1 = x_3$

$\dot{x}_2 = x_4$

$\dot{x}_3 = -k x_1 + k x_2 + u$

$\dot{x}_4 = k x_1 - k x_2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k & k & 0 & 0 \\ k & -k & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = (0)$$

d) Is dit systeem stabiel? Motiveer uw antwoord! **(4 p)**

instabiel, 2x pole in $s = 0$

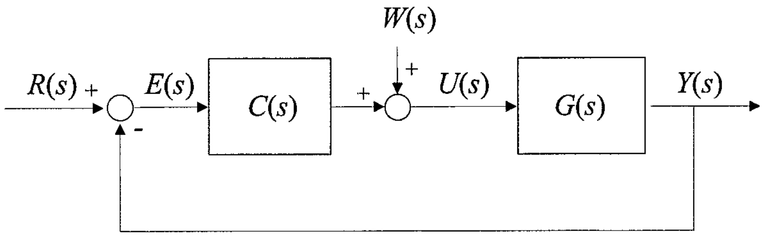
2. Een proces beschreven door de onderstaande overdrachtsfunctie

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

wordt geregeld met een PI regelaar

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

zoals weergegeven in figuur 3. In dit schema is $W(s)$ een constante verstoring met een onbekende amplitude.



Figuur 3: Gesloten-lus regelschema.

a) Veronderstel dat $r(t) = 0$ en $w(t) \neq 0, \forall t$. Geef de overdrachtsfunctie $G_w(s)$ van de verstoring $W(s)$ naar de regelfout $E(s)$. Geef deze functie in K, τ, K_p en T_i. **(12 p)**

$$G_w(s) = \frac{E(s)}{W(s)} = \frac{-K T_i s}{\tau T_i s^2 + T_i(1+KK_p)s + KK_p}$$

Berekening / motivering: $G_w(s) = \frac{E(s)}{W(s)} = \frac{-G(s)}{1+G(s)\,C(s)}$

$$G_w(s) = \frac{-\frac{K}{\tau s+1}}{1+\frac{KK_p(T_i s+1)}{T_i s(\tau s+1)}}$$

$$= \frac{-K T_i s}{T_i s(\tau s+1) + KK_p(T_i s+1)}$$

b) Bereken de *steady-state* waarde e_{ss} voor $w(t) = 3$ en $r(t) = 0$. (De *steady-state* waarde is gedefinierd als $e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t)$.) **(6 p)**

$$e_{ss} = 0$$

Berekening / motivering:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\,E(s) = \lim_{s\to 0} s\,G_W(s)\,W(s) =$$

$$= \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{-K T_i s}{\tau T_i s^2 + T_i(1+KK_p)s + KK_p} \cdot \frac{3}{s}$$

$$= 0$$

c) Veronderstel dat $w(t) = 0, \forall t$. Bereken K_p en T_i zodanig dat de gesloten-lus karakteristieke polynoom (*closed-loop characteristic polynomial*) een gewenste relatieve demping ζ en een gewenste natuurlijke frequentie ω_n heeft. Schrijf K_p en T_i als een functie van de procesparameters K, τ en de gewenste parameters ζ, ω_n. **(28 p)**

Gesloten-lus karakteristieke polynoom: $s^2 + \frac{1+KK_p}{\tau}s + \frac{KK_p}{\tau T_i}$

$$K_p = \frac{2\xi\omega_n\tau - 1}{K}$$

$$T_i = \frac{2\xi\omega_n\tau - 1}{\tau\omega_n^2}$$

Berekening / motivering:

$$\tau T_i s^2 + T_i(1+KK_p)s + KK_p \qquad / : \tau T_i$$

$$\Rightarrow s^2 + \frac{1+KK_p}{\tau}s + \frac{KK_p}{\tau T_i}$$

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 \quad (\text{gewenst})$$

$$2\xi\omega_n = \frac{1+KK_p}{\tau} \qquad \omega_n^2 = \frac{KK_p}{\tau T_i}$$

$$K_p = \frac{2\xi\omega_n\tau - 1}{K}$$

$$T_i = \frac{KK_p}{\tau\omega_n^2} = \frac{2\xi\omega_n\tau - 1}{\tau\omega_n^2}$$

3. Een systeem is beschreven door een model in de toestandsvorm:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

a) Toon aan dat de overdrachtsfunctie van dit systeem gelijk is aan:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3(s+6)}{(s+3)(s+2)}$$

(14 p)

Berekening / motivering: $G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$

$$G(s) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s+3)(s+2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+2 & 3 \\ 0 & s+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s+3)(s+2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 3s+9 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{9 + 3s + 9}{(s+3)(s+2)} = \frac{3(s+6)}{(s+3)(s+2)}$$

b) Schrijf het systeem in de *control canonical form.* **(8 p)**

Geef de matrices A, B, C, D: $G(s) = \dfrac{3s+18}{s^2+5s+6}$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 18 \end{pmatrix} \quad D = (0)$$

c) Dit systeem wordt geregeld door middel van een twee-graden-van-vrijheid toestandsregelaar (*two-degree-of-freedom state-feedback controller*) $u(t) = -Kx(t)+K_{ff}r(t)$, met $r(t)$ de referentie voor de uitgang. De feedback versterkingsvector $K = [k_1 \;\; k_2]$ werd berekend zodanig dat de gesloten-lus karakteristieke polynoom gelijk is aan:

$$d(s) = s^2 + 15s + 50$$

Bereken de *feedforward* versterking K_{ff} zodanig dat de stationaire versterking (*DC gain*) van $G_{cl}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ gelijk is aan 9. (Tip: K hoeft niet berekend te worden om tot een oplossing te komen.) **(8 p)**

$K_{ff} = 25$

Berekening / motivering:

$$K_{ff} = \frac{d(0)}{b(0)} \cdot DC_{des}$$

$d(s) = s^2 + 15s + 50 \Rightarrow d(0) = 50$

$b(s) = 3s + 18 \Rightarrow b(0) = 18$

$DC_{des} = 9$

$$K_{ff} = \frac{50}{18} \cdot 9 = \frac{50}{2} = 25$$

z.o.z.

4. Gegeven is de volgende overdrachtsfunctie:

$$G(s) = \frac{50(s+10)(s+2)}{(s+50)(s+0.2)}$$

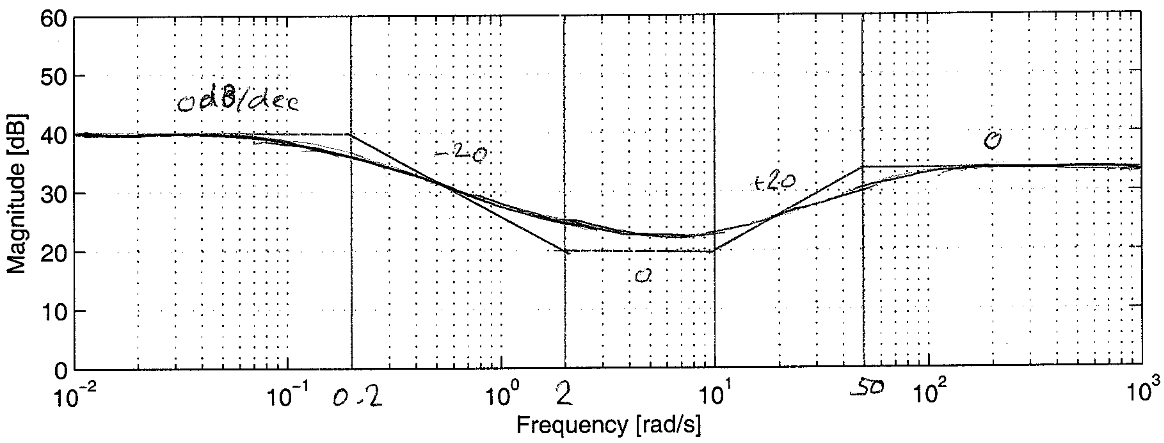
Teken de Bode-plot van $G(s)$. Teken eerst nauwkeurig de asymptoten voor zowel de magnitude als de fase plot en schets daarna de werkelijke vorm van de grafiek. **(24 p)**

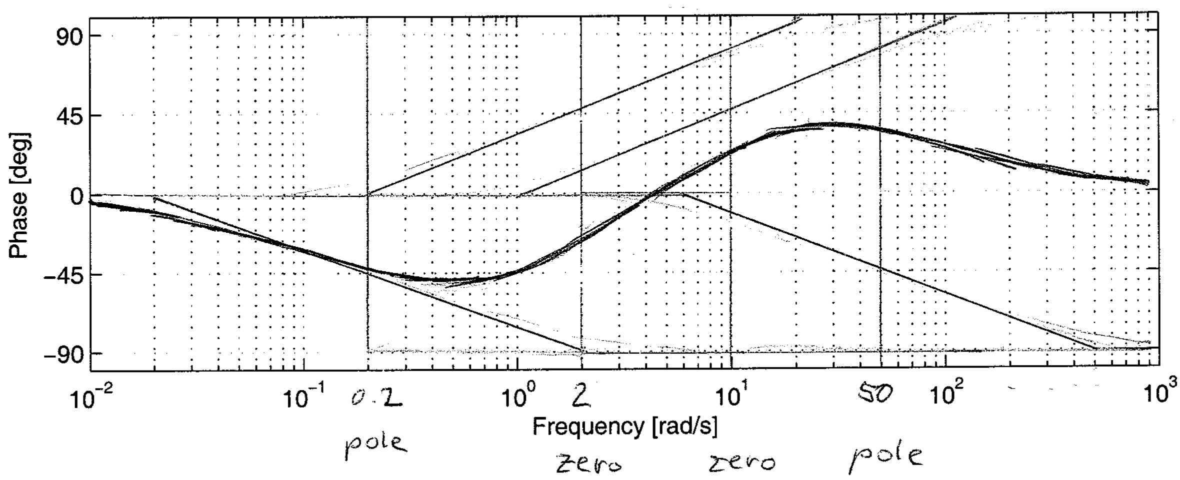
Bereken eerst de frequenties van de kantelpunten (*breakpoints*) en de stationaire versterking (*DC gain*) van $G(s)$.

Frequenties van de kantelpunten: [rad/s]

0.2 (pole), 2 (zero), 10 (zero), 50 (pole)

Stationaire versterking: 100 = 40 dB

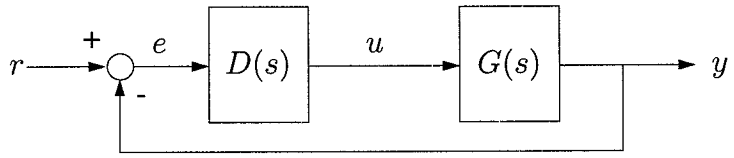




5. Gegeven is het volgende open-loop systeem:

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

Voor dit systeem wordt een regelaar $D(s)$ ontworpen in de gesloten-lus configuratie zoals aangegeven in figuur 4.



Figuur 4: Blok-schema van de gesloten lus.

De ontwerp specificaties voor het geregelde systeem in figuur 4 zijn:

- een *cross-over* frequentie $\omega_c = 0.1$ rad/s,
- een fase marge PM $= 45°$.

a) Ontwerp een regelaar $D(s)$ van de vorm,

$$D(s) = K(T_d s + 1)$$

die aan de gestelde eisen voldoet. Laat alle berekeningen zien. **(18 p)**

$$K = \frac{1}{100\sqrt{2}} = 0.00707$$

$$T_d = 10$$

Berekening:

$$\angle D(j\omega_c) = \tan^{-1}(T_d \omega_c)$$

$$T_d = \tan 45° / \omega_c = 1/0.1 = 10$$

$$|G(j\omega_c) D(j\omega_c)| = K \left| \frac{j\omega_c T_d + 1}{(j\omega_c)^2} \right| =$$

$$= K \left| \frac{j+1}{-0.1^2} \right| = 100\sqrt{2} \cdot K$$

$$100\sqrt{2} \cdot K = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{100\sqrt{2}}$$

z.o.z.

b) Neem dezelfde regelaar $D(s) = K(T_d s + 1)$ en stel $K = 1$. De parameter T_d moet nu bepaald worden met behulp van de root-locus methode. Geef de gesloten-lus karakteristieke vergelijking voor deze situatie in de root-locus vorm $1 + T_d L(s) = 0$. Geef expliciet de overdrachtsfunctie $L(s)$. **(6 p)**

Karakteristieke vergelijking: $1 + \frac{T_d s + 1}{s^2} = 0$

$L(s) = \frac{s}{s^2+1}$ $\qquad 1 + T_d \frac{s}{s^2+1} = 0$

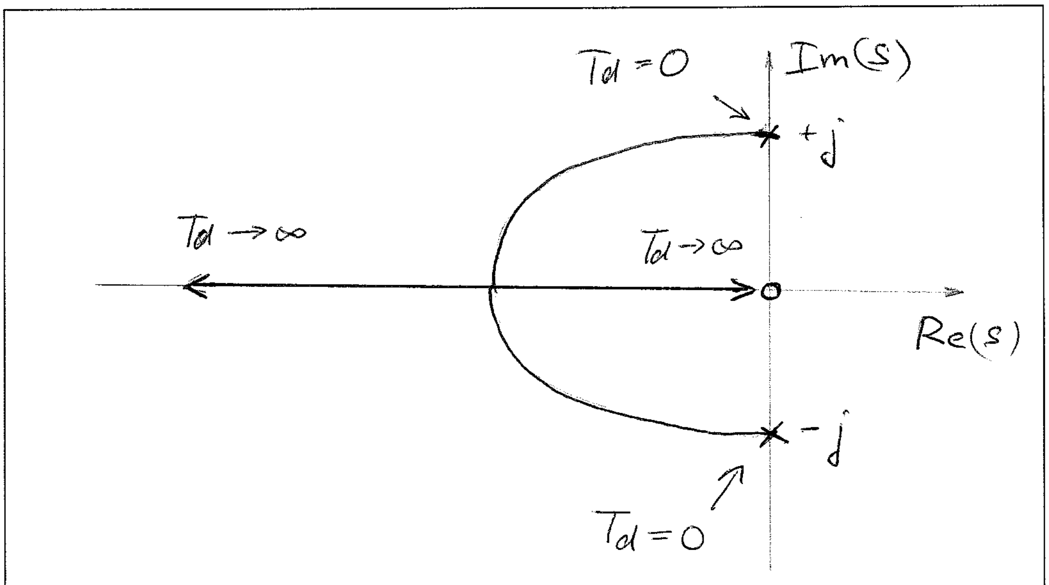
Berekening / motivering:

$$1 + \frac{1}{s^2}(T_d s + 1) = 0 \qquad / \cdot s^2$$

$$\underbrace{s^2 + 1}_{a(s)} + T_d \underbrace{s}_{b(s)} = 0 \qquad / : a(s)$$

$$1 + T_d \frac{s}{s^2+1} = 0$$

c) Schets de *root locus* die bij de karakteristieke vergelijking onder b) hoort. Geef aan waar de gesloten-lus polen liggen voor $T_d = 0$ en waar ze naar toe gaan voor $T_d \to \infty$. **(10 p)**



Einde tentamen

vraagstuk	1 a	1 b	1 c	1 d	2 a	2 b	2 c	3 a	3 b	3 c	4	5 a	5 b	5 c
score														