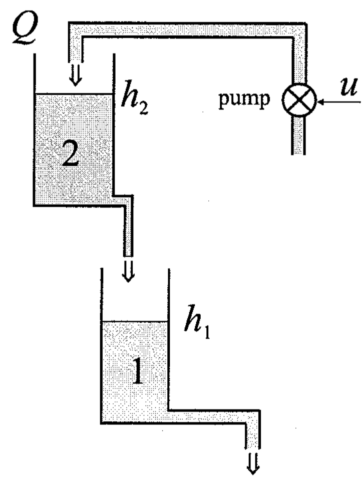
1. Een proces bestaat uit twee vaten in cascade zoals afgebeeld in figuur 1. Vloeistof wordt gepompt in het bovenste vat en stroomt van hier vrij naar het onderste vat.



Figuur 1: Een schema van het te regelen proces.

Dit systeem heeft een ingangssignaal u – de spanning op de motor die de pomp aandrijft; h_1 en h_2 zijn de vloeistof niveaus in het onderste en bovenste vat, respectievelijk. Het doel is om h_1 te regelen. In een gelineariseerd model worden alle variabelen relatief tot hun equilibrium uitgedrukt.

Stel eerst dat de debiet die de pomp oplevert gelijk is aan het ingangssignaal: $Q(t) = u(t)$. Dit betekent dat we de dynamica van de pomp verwaarlozen. Een wiskundig model van dit systeem is:

$$\begin{aligned} \dot{h}_1(t) + 0.5h_1(t) &= 0.5h_2(t) \\ \dot{h}_2(t) + 0.2h_2(t) &= 2u(t) \end{aligned}$$

a) Geef de overdrachtsfunctie G_2 van het ingangssignaal u naar het niveau h_2 in het bovenste vat. **(4 p)**

$$G_2(s) = \frac{H_2(s)}{U(s)} = \frac{2}{s+0.2}$$

Berekening / motivering:

$$s H_2(s) + 0.2 H_2(s) = 2U(s)$$

$$\frac{H_2(s)}{U(s)} = \frac{2}{s+0.2}$$

z.o.z.

b) Geef een uitdrukking voor de responsie van h_2 op een input stap met een amplitude van 3 (Volt). Geef de responsie eerst in het Laplace-domein als een breuksplitsing (ontbinding in eerste-orde termen, ofwel *partial fraction expansion*) en dan ook in het tijddomain. Schets de stapresponsie en geef de tijdsconstante en de steady-state waarde van h_2 aan. **(18 p)**

$$H_2(s) = 30\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+0.2}\right)$$

$$h_2(t) = 30\left(1 - e^{-0.2t}\right)$$

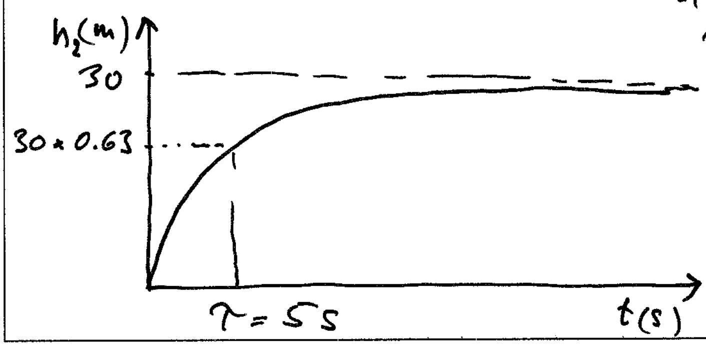
Berekening / motivering: $H_2(s) = \frac{2}{s+0.2} \cdot \frac{3}{s}$

$$H_2(s) = \frac{6}{s(s+0.2)} = \frac{30}{s} - \frac{30}{s+0.2} = 30\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+0.2}\right) \Rightarrow h_2(t) = 30(1-e^{-0.2t})$$

Stapresponsie schets:

$h_{2,ss} = 30$ m

$\tau = 5$ s



c) Geef de overdrachtsfunctie G_1 van het ingangssignaal u naar het niveau h_1. Bereken de polen, nulpunten en de stationaire vesterking (*DC gain*) van G_1. **(12 p)**

$$G_1(s) = \frac{H_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+0.5)(s+0.2)}$$

polen : -0.5, -0.2

nulpunten : geen

stationaire vesterking (*DC gain*) : 10

Berekening / motivering:

$$\frac{H_1(s)}{U(s)} = \frac{H_1(s)}{H_2(s)} \cdot \frac{H_2(s)}{U(s)} = \frac{0.5}{s+0.5} \cdot \frac{2}{s+0.2} = \frac{1}{(s+0.5)(s+0.2)}$$

$$G_1(0) = \frac{1}{0.1} = 10$$

d) Stel nu dat de pomp beschreven is met een eerste-orde dynamisch model. De bijbehorende diferentiaalvegelijkingen zijn:

$$\begin{aligned} \dot{h}_1(t) + 0.5h_1(t) &= 0.5h_2(t) \\ \dot{h}_2(t) + 0.2h_2(t) &= 0.5Q(t) \\ \dot{Q}(t) + Q(t) &= 4u(t) \end{aligned}$$

De gemeten output is het niveau h_1. Schrijf het systeem in toestandsvorm. **(12 p)**

Definieer de toestandvector $x(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) & h_2(t) & Q(t) \end{pmatrix}^T$

en geef de matrices A, B, C, D:

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = 0$$

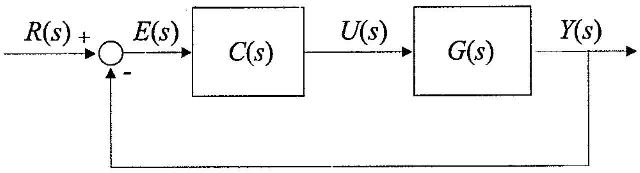
e) Het systeem gegeven onder punt d) wordt geregeld door middel van een proportionele regelaar $u(t) = K_p\,(r(t) - h_1(t))$. Een regeltechnicus beweert dat je voor dit systeem de versterking $K_p > 0$ willekeurig groot mag kiezen en dat het gesloten-lus systeem nooit instabiel wordt. Is deze bewering juist? Motiveer uw antwoord! **(10 p)**

Nee, deze bewering is niet juist.
3 polen, geen nulpunt $\Rightarrow \angle G(s) \to -270^\circ$
Er bestaat dus een K_p zodanig dat:
$|G(s) K_p| = 1$ en $\angle G(s) < -180^\circ$

2. Een proces beschreven door de onderstaande overdrachtsfunctie:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s^2+5s+6)}$$

wordt geregeld met en een propotionele regelaar $C(s) = K$ zoals weergegeven in figuur 2.



Figuur 2: Gesloten-lus regelschema.

a) Geef de overdrachtsfuncties $G_e(s) = E(s)/R(s)$ en $G_u(s) = U(s)/R(s)$. **(12 p)**

$$G_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+GK} = \frac{s(s^2+5s+6)}{s^3+5s^2+6s+K}$$

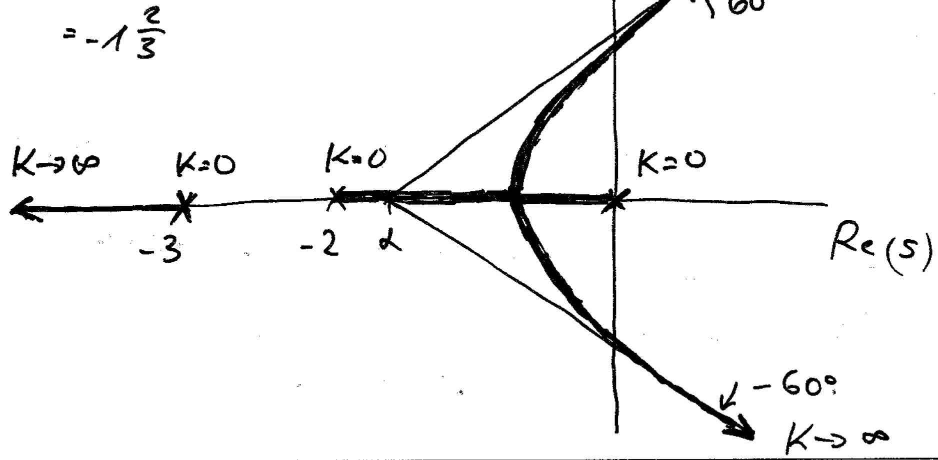
$$G_u(s) = \frac{U(s)}{R(s)} = K \cdot G_e(s) = \frac{K\,s\,(s^2+5s+6)}{s^3+5s^2+6s+K}$$

b) Geef de gesloten-lus karakteristieke vergelijking (*characteristic equation*). **(6 p)**

$$1 + K\,\frac{1}{s(s^2+5s+6)} = 0$$

c) Schets de *root locus* die bij de karakteristieke vergelijking onder b) hoort. Geef aan waar de gesloten-lus polen liggen voor $K = 0$ en waar ze naar toe gaan voor $K \to \infty$. **(18 p)**

$$\alpha = \frac{-2-3-0}{3} = -1\tfrac{2}{3}$$



d) Wat is het type van dit systeem (met de proportionele regelaar)? Geef de steady-state waarde ($t \to \infty$) van $e(t)$ voor $r(t) = 2t$ (*ramp reference*). **(18 p)**

Systeemtype: 1 (1 integrator in loop TF)

$e_{ss} = \frac{12}{K}$

Berekening / motivering:

ramp

$$E(s) = G_e(s) \cdot \frac{2}{s^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \left(s \cdot \frac{s(s^2+5s+6)}{s^3+5s^2+6s+K} \cdot \frac{2}{s^2} \right)$$

$$= \frac{12}{K}$$

e) Stel dat de regelaar is ingesteld met een constante versterking $K = 10$. Het proces heeft echter een variabele parameter b:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s^2 + bs + 6)}$$

Geef de gesloten-lus karakteristieke vergelijking voor deze situatie in de root-locus vorm $1 + bL(s) = 0$. Geef expliciet de overdrachtsfunctie $L(s)$. **(18 p)**

Karakteristieke vergelijking: $1 + b \frac{s^2}{s^3+6s+10} = 0$

$L(s) = \frac{s^2}{s^3+6s+10}$

Berekening / motivering:

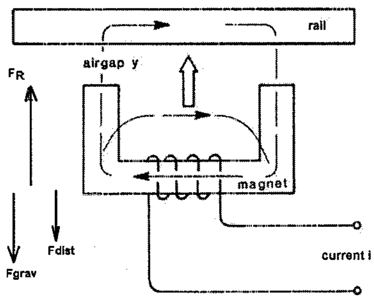
$$s(s^2+bs+6) + 10 = 0$$

$$s^3 + bs^2 + 6s + 10 = 0$$

$$\underbrace{s^3 + 6s + 10}_{A_L(s)} + b\underbrace{s^2}_{B_L(s)} = 0$$

z.o.z.

3. Een magnetische levitatie systeem is schematisch weergegeven in figuur 3.



Figuur 3: Een schematische weergave van een magnetische levitatie systeem.

Een wiskundig model in de toestandsvorm is:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -b \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

Hier is u het stuursignaal (stroom door de spoel), y de te regelen output (de luchtspleet) en $a > 0$, $b > 0$ zijn bekende positieve reëele parameters. Dit systeem wordt geregeld door middel van een twee-graden-van-vrijheid toestandsregelaar (*two-degree-of-freedom state-feedback controller*) $u(t) = -Kx(t) + K_{ff}r(t)$, met $r(t)$ de referentie voor de luchtspleet en K, K_{ff} de regelaarparameters.

a) Bereken $K = [k_1 \;\; k_2]$ zodanig dat de gesloten-lus karakteristieke polynoom (*closed-loop characteristic polynomial*) een gewenste relatieve demping ζ en een gewenste natuurlijke frequentie ω_n heeft. Schrijf K als een functie van de procesparameters a, b en de gewenste parameters ζ, ω_n. **(18 p)**

$$K = -\frac{1}{b}\begin{pmatrix}\omega_n^2 + a & 2\zeta\omega_n\end{pmatrix}$$

Berekening / motivering: karakteristieke pol: det(sI-A+BK)

$$\det\left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -bk_1 & -bk_2 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} s & -1 \\ -a-bk_1 & s-bk_2 \end{pmatrix}$$

$$= s^2 - bk_2 s - (a + bk_1)$$

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad \text{gewenst}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} -bk_2 = 2\zeta\omega_n \\ -a - bk_1 = \omega_n^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} k_1 = -(\omega_n^2 + a)/b \\ k_2 = -2\zeta\omega_n/b \end{matrix}$$

b) Geef de gesloten-lus overdrachtsfunctie $G_{cl}(s) = Y(s)/R(s)$. **(12 p)**

$$G_{cl}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{-b\,K_{ff}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Berekening / motivering:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= a x_1 - b u \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \ddot{x}_1 - a x_1 &= -b u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-b}{s^2 - a}$$

$$G_{cl}(s) = \frac{-b\,K_{ff}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

c) Bereken de *feedforward* versterkingsfactor K_{ff} zodanig dat de stationaire versterking (*DC gain*) van $G_{cl}(s)$ gelijk is aan 1. **(12 p)**

$$K_{ff} = -\frac{\omega_n^2}{b}$$

Berekening / motivering:

$$G_{cl}(0) = \frac{-b\,K_{ff}}{\omega_n^2}$$

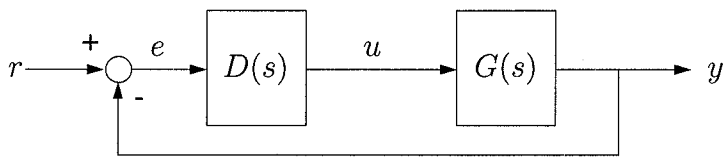
$$1 = -b\,K_{ff}/\omega_n^2$$

$$K_{ff} = -\omega_n^2/b$$

4. Voor het ontwerp van een regelaar voor de besturing van een passagiersvliegtuig wordt het volgende model gebruikt:

$$G(s) = \frac{80(100s+1)}{s(400s^2+4s+1)}.$$

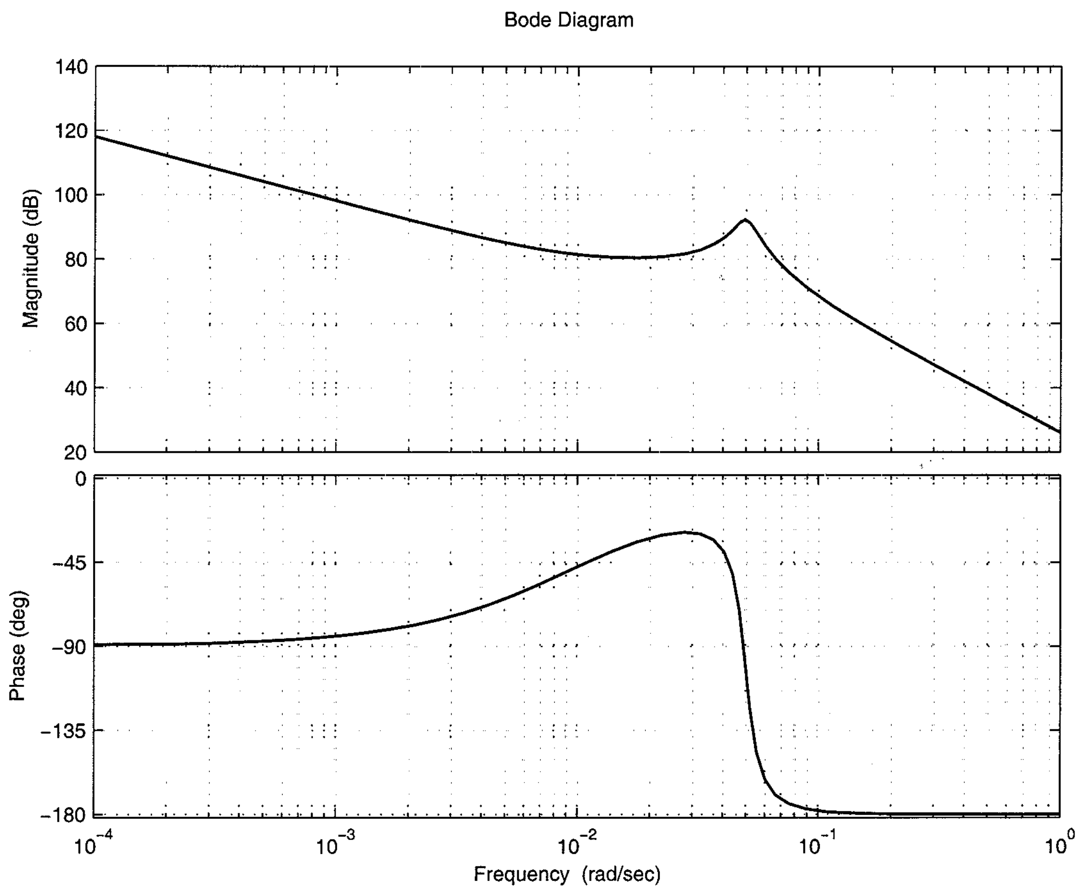
Voor dit open-loop systeem wordt een regelaar $D(s)$ ontworpen in de gesloten-lus configuratie zoals aangegeven in figuur 4. Een Bode-plot van $G(s)$ is weergegeven in figuur 5.



Figuur 4: Blok-schema van de gesloten lus.

De ontwerp specificaties voor het geregelde systeem in figuur 4 zijn:

- een cross-over frequentie ω_c gelijk aan 0.1 rad/s.
- een fase marge PM $\geq 50°$.



Figuur 5: Bode-plot voor $G(s) = \dfrac{80(100s+1)}{s(400s^2+4s+1)}$.

a) Ontwerp een regelaar $D(s)$ van de vorm,

$$D(s) = K\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

die aan de gestelde eisen voldoet. Laat alle berekeningen zien (maak gebruik van: $\sin 50° = 0.766$). **(18 p)**

$K = 1.36 \times 10^{-4}$

$\alpha = 0.1325$

$T = 27,5$

Berekening: ① Fase: $\angle G(0.1j) \cong -180° \Rightarrow 50°$ extra

$$\alpha = \frac{1-\sin 50°}{1+\sin 50°} = 0.1325$$

$$T = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{0.1\sqrt{\alpha}} = 27,5$$

② Magnitude:

$$|G(0.1j)| = \left|\frac{80\sqrt{101}}{-400\times 0.01j - 0.04 + 0.1j}\right| =$$

$$\cong \left|\frac{800}{-0.04 - 0.3j}\right| \cong \frac{800}{0.3}$$

$$= 2666$$

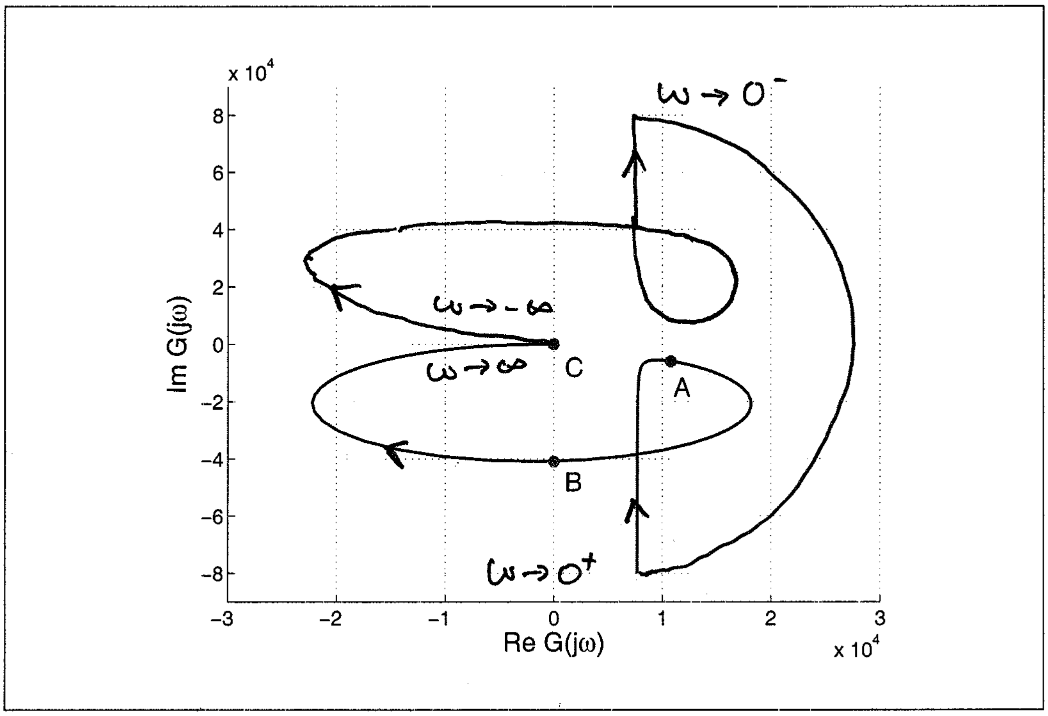
$$D = K\frac{Tj\omega+1}{\alpha Tj\omega+1}$$

$$|D| = K\left|\frac{2,75j+1}{0.36j+1}\right| = 2,75\,K$$

$$1 = |G(0.1j)| \cdot |D(0.1j)| \Rightarrow K = \frac{1}{2666\times 2,75}$$

$K = 1,36 \times 10^{-4}$

(b) Hieronder is een Nyquist-plot van $G(s)$ weergegeven voor positieve ω. Maak de Nyquist-plot compleet voor alle waarden van $\omega \in (-\infty, \infty)$. Geef de richting van stijgende ω aan. **(6 p)**



(c) In de bovenstaande Nyquist-plot zijn punten A, B en C gemarkeerd. Geef aan in de bijbehorende Bode-plot hieronder waar deze punten liggen op de magnitude en fase plot. **(6 p)**