Formuleblad college Stromingsleer wb1225

Integraalbalansen (Behoudswetten in integraalvorm)

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV}\rho\Pi dV = -\iint_{A}\rho\Pi\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})dA + \iiint_{CV}F_V\,dV + \iint_{A}F_A\,dA$$

Voor een controlevolume CV omsloten door een oppervlak A waarbij $\boldsymbol{n}$ de buitennormaal op A is. Het snelheidsveld is **v**; de dichtheid (evt. -veld) is ρ. De Π bepaalt de behoudswet en F_V en F_A zijn respectievelijk de volume- en de oppervlakte 'bronnen' van Π. Voor een wrijvingsloos fluïdum geldt:

1. $\Pi = 1$	en $F_V = F_A = 0$	behoud van massa
2. $\Pi = \mathbf{v}$	en $F_V = \rho\boldsymbol{g}$ en $F_A = -p\boldsymbol{n} + \tau\boldsymbol{t}$	behoud van impuls
3. $\Pi = U + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + gz$	en $F_V = \dot{q} - W_{technisch}$ en $F_A = -p(\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{v})$	behoud van energie

Behoudswetten in differentiaalvorm voor één-dimensionale stroming

1. Behoud van massa

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} \equiv \frac{D\rho}{Dt} = -\rho\frac{\partial u}{\partial x}$$

2. Behoud van impuls

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) \equiv \rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \frac{\partial\tau}{\partial y}$$

3. Behoud van energie

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(U + \tfrac{1}{2}v^2 + gz\right) + u\frac{\partial}{\partial x}\left(U + \frac{p}{\rho} + \tfrac{1}{2}v^2 + gz\right) = q - W_{technisch}$$

Voor een Newtonse vloeistof geldt: $\tau = \mu\frac{\partial u}{\partial y}$ met μ de dynamische viscositeit.

Het Π-theorema

Stel dat een probleem beschreven kan worden met n onafhankelijke parameters en er zijn m basisdimensies waarin alle n parameters beschreven kunnen worden dan geldt dat het probleem in n - m dimensieloze combinaties of Π-groepen beschreven kan worden.

Één-dimensionaal volledig ontwikkeld laminair snelheidsprofiel in een kanaal (smeerfilm)

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Oplossing van beide vergelijkingen zijn afhankelijk van de randvoorwaarden Couette, Poiseuille of gecombineerde stroming:

$u(y) = U_1 + \frac{(U_2 - U_1)}{h}\cdot y - \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\left(y\cdot(h-y)\right)$, met h de kanaalhoogte, en U_1 en U_2 de snelheid op onderwand en bovenwand, respectievelijk.

Eén-dimensionaal volledig ontwikkeld laminair snelheidsprofiel in een ronde buis

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

De oplossing voor een laminaire stroming die voldoet aan u=0 op de wand van de buis r=R=d/2 wordt de Poiseuille stroming genoemd: $u(r) = \frac{-1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\left(R^2 - r^2\right)$.

Impuls- en energiebalans in een stationaire pijpstroming

Totaaldruk en 'opvoerhoogte' verlies langs een pijpleiding ten gevolge van wandwrijving en overige verliezen:

$$\left(p_1 + \tfrac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g z_1\right) - \left(p_2 + \tfrac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g z_2\right) = f \cdot \frac{L}{d} \cdot \tfrac{1}{2}\rho V^2 + K \cdot \tfrac{1}{2}\rho V^2 + \left(Power_{Turbine} - Power_{Pomp}\right)/Q$$

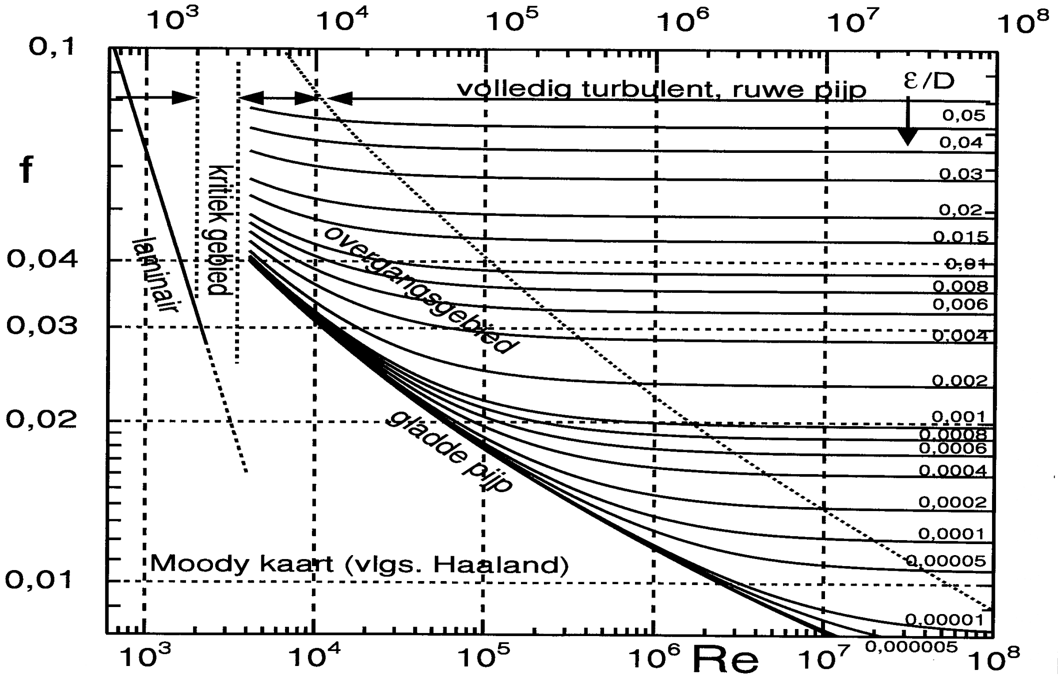
met f de wrijvingsfactor tengevolge van wandwrijving en K de verliesfactor tengevolge van andere effecten, zoals bochten, etc. In een pijp met constante diameter d geldt $V_2 = V_1$.

Voor een laminaire pijpstroming geldt (Poiseuille): $f = \dfrac{64}{\mathrm{Re}_D}$.

met $\mathrm{Re}_D = U_B.D/\nu = \rho.U_B.D/\mu$ = het Reynoldsgetal waarin D de diameter van de pijp, U_B de bulk- of de gemiddelde snelheid over de doorsnede zijn. μ en ν zijn respectievelijk de dynamische en de kinematische viscositeit.

Voor een turbulente pijpstroming geldt (Haaland): $\dfrac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \cdot \log\left(\left(\dfrac{\varepsilon/D}{3.7}\right)^{1.11} + \dfrac{6.9}{\mathrm{Re}_D}\right)$.

waarin ε de karakteristieke afmeting is van de ruwheden op de wand van de pijp.
Voor 'gladde pijpen' bij relatief lage Re_D (maar wel turbulent, $10^3 < \mathrm{Re}_D < 10^5$) geldt (Blasius): $f = 0.316/\mathrm{Re}_D^{1/4}$. Bovenstaande formules worden samengevat in het Moody diagram.



Voor een niet-cilindrische pijp (bv. een rechthoekig kanaal) wordt in bovenstaande vergelijkingen gebruik gemaakt van de hydraulische diameter $D_h = \dfrac{4 \times \text{oppervlak}}{\text{omtrek}}$ voor turbulente stromingen.

Inlooplengte L_i voor een buisstroming: $\dfrac{L_i}{D} = 0.06\,\mathrm{Re}_D$ (Laminair); $\dfrac{L_i}{D} = 4.4\,\mathrm{Re}_D^{1/6}$ (Turbulent).

Waterslag in een instationaire pijpstroming

Een drukschok treedt op bij een plotseling (instantaan) versnelde of vertraagde vloeistofstroming.
De snelheid van de schok bedraagt:

$1/c^2 = 1/c_0^2 + \rho D/tE$, met t en D = wanddikte en diameter buis;

E = elasticiteitsmodulus buiswand, c_0 = geluidsnelheid in vloeistof alléén.

De drukstijging over de schok luidt:

$\Delta p = \rho \cdot c \cdot v$, met v = snelheidsverschil vóór en ná de schok.

Grenslaag

Verdringingsdikte: $\delta^* = \int_0^\infty \left(1-\frac{u}{U}\right)dy \approx \int_0^\delta \left(1-\frac{u}{U}\right)dy$

Impulsverliesdikte: $\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy \approx \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy$

waarin $u(y)$ het snelheidsprofiel in de grenslaag is; $U(x)$ is de vrije stroomsnelheid buiten de grenslaag; δ is de grenslaagdikte; de hoogte waar u tot $0.99U(x)$ genaderd is.

De impulsbalans op een vlakke plaat met de x-coördinaat in de richting van de vrije stroom luidt:

$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx}\left(U^2\theta\right) + \delta^* U \frac{dU}{dx}$, met τ_w de wandschuifspanning.

Grenslaagdikte en weerstandscoëfficiënt voor niet-versnelde grenslaag, U = Cst:

Laminair: $\frac{\delta}{x} = \frac{5.48}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$; $c_D \equiv \frac{2}{\rho U^2 L}\int_0^L \tau_w(x)dx = \frac{1.46}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}$.

Turbulent: $\frac{\delta}{x} = \frac{0.16}{\mathrm{Re}_x^{1/7}}$; $c_D = 0.031 \cdot \mathrm{Re}_L^{-1/7}$.

Weerstand en Lift

Definitie weerstandscoëfficiënt C_D $\frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} = C_D$

met A een karakteristiek oppervlak dat gekozen wordt op basis van het stromingsproces dat bepalend is voor de weerstand (d.w.z. wrijvings- of drukweerstand). In het eerste geval en bij liftgevende oppervlakken is A meestal het 'benatte oppervlak' of het contactoppervlak, in het tweede geval meestal het aanstroomoppervlak, ofwel het geprojecteerde oppervlak loodrecht op de stroming. De C_D is (ondermeer) een functie van het Reynoldsgetal.

Definitie van liftcoëfficiënt C_L $\frac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} = C_L$

met A een karakteristiek oppervlak. Voor een liftgevend oppervlak is A meestal het contactoppervlak; bijvoorbeeld het vleugeloppervlak van een vleugel, propellerblad etc. De C_L is (ondermeer) een functie van het Reynolds getal en met name de invalshoek.

Open kanaal stromingen

Energiebalans: $\left(\frac{1}{2}V^2 + gh\right)_1 - \left(\frac{1}{2}V^2 + gh\right)_2 = \frac{PL}{A}\tau_w = f\frac{L}{D_h}\frac{1}{2}V^2$, waarin P de bevochtigde omtrek is, A de doorsnede en F de Manning-frictiefactor.

Voortplantingssnelheid van golven van kleine amplitude op ondiep water met diepte y: $c_g = \sqrt{gy}$

Specifieke energie in een kanaal met constante breedte en waterdiepte y: $E = \frac{1}{2g}\frac{q^2}{y^2} + y$, waarin q het volume debiet is per m breedte van het kanaal

Watersprong: $\frac{y_2}{y_1} = \frac{-1+\sqrt{1+8Fr^2}}{2}$, met y_1 de waterdiepte voor de watersprong en y_2 de waterdiepte achter de watersprong. De Fr is het Froude getal betrokken op condities vóór de watersprong, met $Fr = U\big/\sqrt{g \cdot y}$

Energieverlies over een watersprong $E_1 - E_2 = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_1y_2}$

Enkele eigenschappen van gassen

Ideale gaswet: $p = \rho RT$, met R gasconstante = 287 $m^2\,s^{-2}\,K^{-1}$ voor lucht.

Wet van Poisson (isentroop en adiabatisch gas): $\dfrac{p}{\rho^\kappa} = \text{constant}$, met $\kappa = c_p/c_v$ = 1.4 voor lucht

De geluidssnelheid: $c^2 = \left.\dfrac{dp}{d\rho}\right|_S = \kappa RT$ (drukgolven van kleine amplitude)

Machgetal M of $Ma = U/c$ = verhouding karakteristieke snelheid van een stroming met snelheid U tot lokale geluidssnelheid. $M > 1$ heet ook wel 'supersoon', $M < 1$ 'subsoon'.

Compressibele stromingen

Eén-dimensionale compressibele stromingen:
met T_0, ρ_0 en p_0 de reservoircondities.

Relatie voor T is adiabatisch (zonder warmtetoevoer).
Relaties voor ρ en p adiabatisch én isentropisch (dus zonder schokken).

$$\begin{cases} \dfrac{T_0}{T} = 1 + \tfrac{1}{2}(\kappa - 1)M^2 \\ \dfrac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \tfrac{1}{2}(\kappa - 1)M^2\right)^{1/(\kappa-1)} \\ \dfrac{p_0}{p} = \left(1 + \tfrac{1}{2}(\kappa - 1)M^2\right)^{\kappa/(\kappa-1)} \end{cases}$$

Doorsnede convergerend-divergerend kanaal zonder schokken: $\dfrac{A}{A^*} = \dfrac{1}{M}\left[\dfrac{1 + \tfrac{1}{2}(\kappa-1)M^2}{\tfrac{1}{2}(\kappa+1)}\right]^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}}$

met A^* de keeldoorsnede.

Relaties voor een rechte schok:
$$\begin{cases} \dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{2\kappa M_1^2 - (\kappa-1)}{\kappa+1} \\ \dfrac{\rho_2}{\rho_1} = \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{(\kappa+1)M_1^2}{2 + (\kappa-1)M_1^2} \\ M_2^2 = \dfrac{2 + (\kappa-1)M_1^2}{2\kappa M_1^2 - (\kappa-1)} \end{cases}$$

met het subscript 1 condities vóór de schok en het subscript 2 condities ná de schok

Compressibele kanaalstroming met wrijving:

$$\frac{dp}{p} = -\kappa M^2 \frac{\left[1 + (\kappa-1)M^2\right]}{2\left[1 - M^2\right]} \frac{f\,dx}{D} \quad \text{en} \quad \frac{\bar{f} L^*}{D} = \frac{1 - M^2}{\kappa M^2} + \frac{\kappa+1}{2\kappa}\ln\left(\frac{(\kappa+1)M^2}{2 + (\kappa-1)M^2}\right)$$

waarin L^* de afstand is van een gegeven positie met Mach getal M tot aan het punt waarde kritieke condities $M=1$ worden bereikt.

Verder volgt:
$$\begin{cases} \dfrac{p}{p^*} = \dfrac{1}{M}\left[\dfrac{\kappa+1}{2 + (\kappa-1)M^2}\right]^{1/2} \\ \dfrac{\rho}{\rho^*} = \dfrac{V^*}{V} = \dfrac{1}{M}\left[\dfrac{2 + (\kappa-1)M^2}{\kappa+1}\right]^{1/2} \\ \dfrac{T}{T^*} = \dfrac{\kappa+1}{2 + (\kappa-1)M^2} \end{cases}$$

met de p, ρ en T de condities in de buis ter plaatse van het Mach getal M en waar p^*, ρ^* en T^* de druk, dichtheid en temperatuur zijn ter plaatse van de kritieke condities voor M = 1.

Roterende stromingsmachines

Relatie van Euler voor een roterende stromingsmachine (pomp, turbine): $T = \dot{m}\left(r_2 V_{T,2} - r_1 V_{T,1}\right)$
waarin T het uitgeoefende koppel (krachtmoment) is en V_{t1} en V_{t2} de tangentiële snelheden op de radiële posities r_1 en r_2, (intree respectievelijk uittree), en $\dot{m}$ is de massastroom door de machine.

Het vermogen P is dan gelijk aan: $P = \Omega T$, met Ω de hoeksnelheid van turbine of pomp.

Impuls(Pelton)turbine: $T = \dot{m}R\left(V_j - \Omega R\right)\left(1 - \cos\beta\right)$
waarin R de straal van het wiel is, V_j de instroomsnelheid van de straal, Ω de hoeksnelheid van het wiel en β de uitreehoek van de straal