Fluid mechanics

Instruction 4

Week 4

Van onderstaande vraagstukken zal tijdens de instructie er een aantal behandeld worden. Het is een goede voorbereiding er doorheen te kijken, en te proberen of je ze zelf kan oplossen.

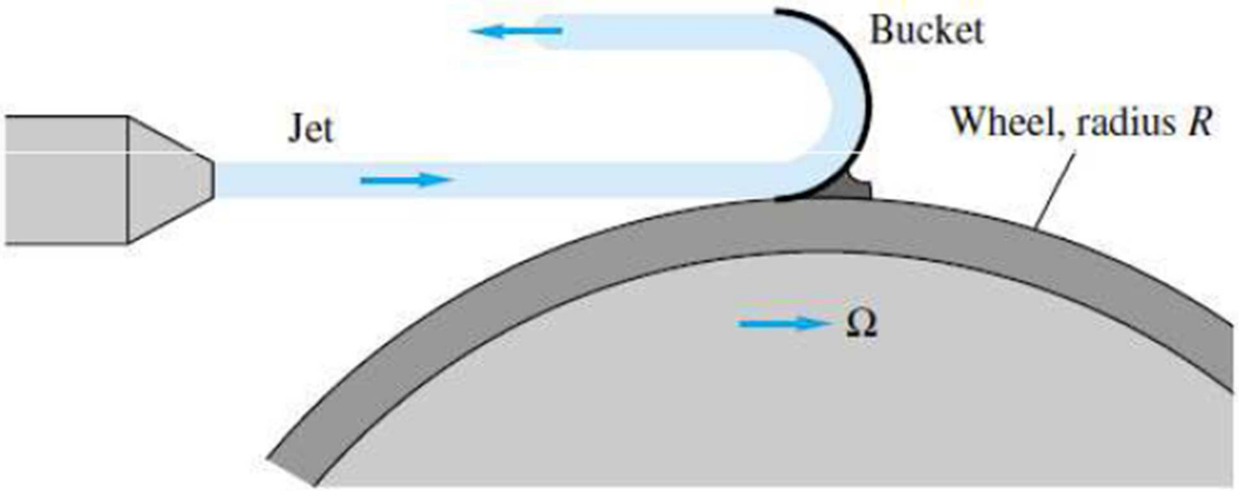
Let op: vraagstuknummering is niet altijd uniform door de verschillende edities van 'White'.

Ik heb ook de uitwerking van de ´Peltonturbine´ erbij gedaan.
www.youtube.com/watch?v=jhKGYEanq4M&feature=related

Bron: alle opgaven komen van het boek *Fluid Mechanics* van Frank M. White (McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering)

Impulsbalans: uitwerking Peltonturbine

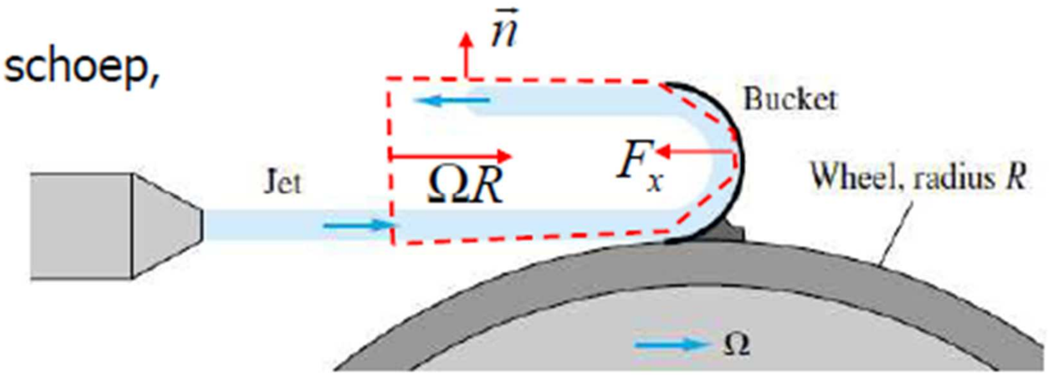
P3.51 A liquid jet of velocity V_j and area A_j strikes a single 180° bucket on a turbine wheel rotating at angular velocity Ω, as in Fig. P3.51. Derive an expression for the power P delivered to this wheel at this instant as a function of the system parameters. At what angular velocity is the maximum power delivered? How would your analysis differ if there were many, many buckets on the wheel, so that the jet was continually striking at least one bucket?



Bij enkele schoep: reis mee met schoep,

dan stationaire stroming:

Impulstheorema



$$\frac{d}{dt}\int_{CV} \rho u_x d\,vol = -\int_{rand,CV} (\rho u_x)(\vec{u}\cdot\vec{n})\,d\,rand,CV + \sum F_x$$

Bereken inproducten ('projectie op normaal')

$$0(stationair) = -(\rho u_{x,in})\cdot A_j \cdot -|u_{x,in}| \; + \; -(\rho u_{x,uit})\cdot A_j \cdot +|u_{x,uit}| + F_x$$

Herschikken:

$$F_x = (-u_{x,in})\cdot \rho A_j \cdot |u_{x,in}| \; + \; (u_{x,uit})\cdot \rho A_j \cdot |u_{x,uit}| = (-u_{x,in} + u_{x,uit})\dot{m}$$

Water nadert CV met $u_{x.in} = u_j - u_{schoep}$ *; schoep keert relatieve snelheid exact om:*

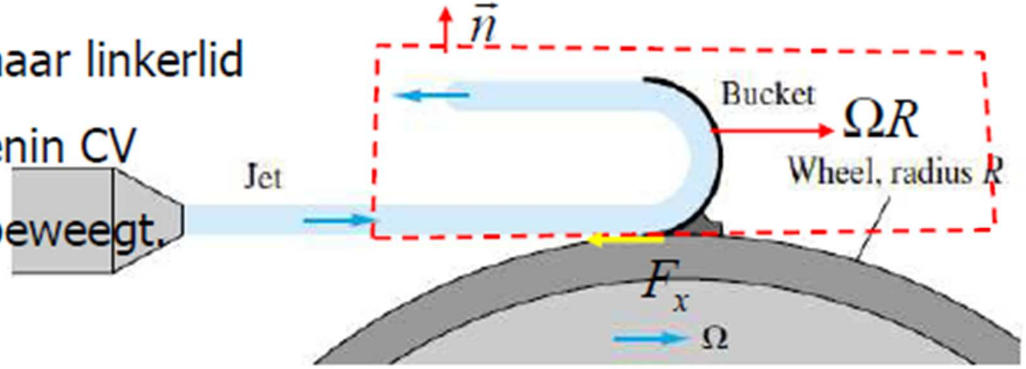
$$F_x = \left(-(u_j - \Omega R) + (\Omega R - u_j)\right)\dot{m} \; ; \; \dot{m} = \rho(u_j - \Omega R).A_j \rightarrow F_x = -2\rho(u_j - \Omega R)^2 .A_j$$

F_x = kracht op water; F_{schoep} = reactiekracht; Power = inproduct kracht en snelheid:

$$P = \Omega R \cdot 2\rho(u_j - \Omega R)^2 \cdot A_j \; ; \; Maximum? \;\; dP/d\Omega = 0 \rightarrow d\left(P/2R\rho A_j\right)/d\Omega = 0$$

$$\rightarrow (u_j - \Omega R)^2 - 2\Omega R\cdot(u_j - \Omega R) = 0 \rightarrow (u_j - \Omega R) - 2\Omega R = 0 \rightarrow \underline{\Omega R = \tfrac{1}{3}u_j}$$

Kon het ook *niet* meereizend? Ja, maar linkerlid wordt ongelijk 0, want impuls binnenin CV neemt toe met tijd als schoep wegbeweegt.



Impulstheorema:

$$\frac{d}{dt}\int_{CV} \rho u_x d\,vol = -\int_{rand,CV} (\rho u_x)(\vec{u}\cdot\vec{n})\,d\,rand,CV + \sum F_x$$

Toename impuls in CV = volumetoename x impulsdichtheid

Water in CV: $u_{x,in} = u_j$; *schoep keert relatieve snelheid om, dus* $u_{x,uit} = 2 * u_{schoep} - u_j$

$$\Omega R \cdot A_j \cdot \left(\rho u_{x,in} + \rho u_{x,uit}\right) = -\left(\rho u_{x,in}\right)\cdot A_j \cdot -\left|u_{x,in}\right| \; + \; -\left(\rho u_{x,uit}\right)\cdot A_j \cdot +\left|u_{x,uit}\right| + F_x$$

Herschikken; stel $2\Omega R < u_j$ en invullen:

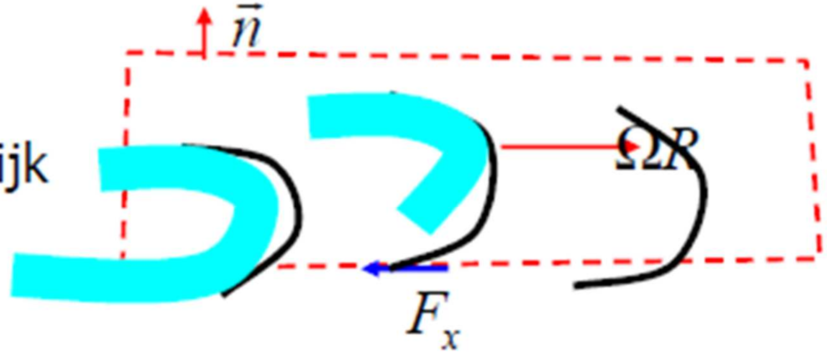
hint: $\left[F_x = \dot{m}\cdot\left(V_{in} - V_{uit}\right)\right]$ geldt niet meer, want massa in CV neemt toe!

$$\Omega R \cdot A_j \cdot \left(2\rho\Omega R\right) = \rho u_j^{\,2} A_j \; + -\rho\left(2\Omega R - u_j\right)\cdot A_j \cdot \left(u_j - 2\Omega R\right) + F_x$$

Herschikken geeft gezocht resultaat:

$$F_x = \rho A_j \left[-u_j^{\,2} - \left(2\Omega R - u_j\right)^2 + \Omega R \cdot \left(2\Omega R\right)\right]$$

$$= \rho A_j \left[-2u_j^{\,2} + 4\Omega R \cdot u_j - 2\left(\Omega R\right)^2\right] = -2\rho A_j \left(\Omega R - u_j\right)^2 \quad \text{QED}$$



Nu met 'veel schoepen' Neem stationair CV

Alle instromende impuls wordt ook daadwerkelijk ergens overgedragen (maar niet noodzakelijk op dezelfde schoep); linkerlid wordt dus 0:

Uitstroomterm nu bepaald door massabalans; (er kan op een bepaald tijdstip op meerdere plaatsen nog water het CV verlaten!) dus

$A_j . u_{x,uit}$ is geen goede maat voor uitstroom...

Balans: $0 = \rho u_j^2 A_j - uitstroom + F_x = u_j \dot{m} - uitstroom + F_x$

met $\dot{m}$ massastroom (en die is wél behouden); dus uitstroomterm is $\dot{m} \cdot u_{x,uit}$

Daarmee: $0 = \dot{m} \cdot \left(u_{x,in} - u_{x,uit}\right) + F_x \rightarrow F_{x,schoep} = -F_x = \dot{m} \cdot \left(u_{x,in} - u_{x,uit}\right)$

Water in CV: $u_{x.in} = u_j$; *schoep keert relatieve snelheid om, dus* $u_{x,uit} = 2^* u_{schoep} - u_j$

$$F_{x,schoep} = \rho u_j A_j \left(u_j - \left(2\Omega R - u_j\right)\right) = 2\rho u_j A_j \left(u_j - \Omega R\right)$$

Vermogen:

$$P = u_{schoep} \cdot F_{x,schoep} = 2\rho u_j A_j \left(u_j - \Omega R\right)\Omega R$$

Is parabool als functien van ΩR.

Maximum halverwege; $P = u_{schoep} \cdot F_{x,schoep} = 2\rho u_j A_j \left(u_j - \tfrac{1}{2}u_j\right) \cdot \tfrac{1}{2}u_j = \tfrac{1}{2}\rho u_j^3 A_j$

Het uitstromende water heeft alle kinetsche energie verloren.

Aan water geleverde energie (bijv. door een stuwmeer, van waaruit water wrijvingsloos versneld wordt)

$$P = Q \cdot \Delta P = Q \cdot \rho g h \;=\; Q \cdot \tfrac{1}{2}\rho u_j^2 = \tfrac{1}{2}\rho u_j^3 A_j$$

waarbij achtereenvolgens hydrostatische druk middels 'Bernoulli' in kinetische energie is omgezet; en de massabalans is toegepast.

Peltonturbines hebben iha zeer hoge rendementen en worden ingezet bij grote druk/hoogteverschillen (zie hfdstk 9. White)

Massa- en impulsbalans

Een turbulente stroming in een ronde buis van straal *R* kan worden beschreven met het volgende snelheidsprofiel in de buis (we zullen dit in de stromingsleer vaker tegenkomen):

, waarbij U_C de 'centreline' snelheid (dus in het midden van de buis) is.

- Maak een schets van dit snelheidsprofiel. $u(r) = U_C \cdot \left(1-(r/R)\right)^{1/7}$
- Bepaal de gemiddelde snelheid in de buis, *U*, en de verhouding U_C/U.

Een veelgebruikte ingenieursregel voor meten van snelheid in pijpleidingen is: 'meet op een kwart radius vanaf de wand'. Laat zien dat je hier inderdaad dicht bij de gemiddelde snelheid zit!

- Bepaal de impulsflux I door een doorsnede (een vlakje loodrecht op de buisas), en bepaal de verhouding . $I/\left(\rho U^2 \cdot \pi r^2\right)$

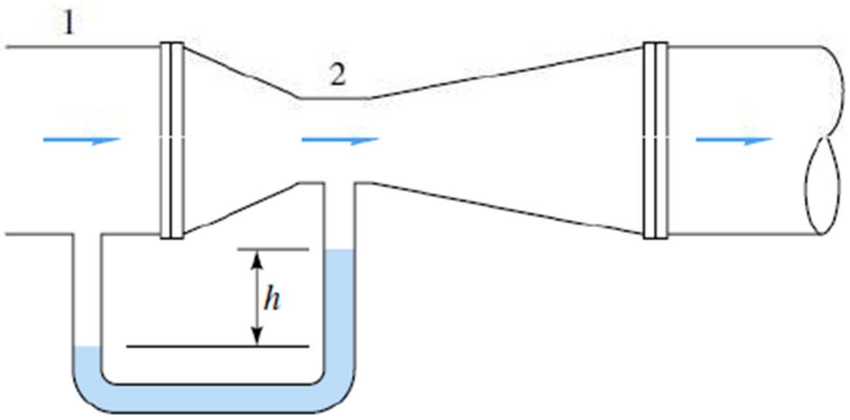
Deze is voor elk niet-vlak snelheidsprofiel net iets groter dan 1, en wordt in impulsbalansen soms als een 'correctiefactor' gebruikt.

Energiebalans

P3.165 A *venturi meter*, shown in Fig. P3.165, is a carefully designed constriction whose pressure difference is a measure of the flow rate in a pipe. Using Bernoulli's equation for steady incompressible flow with no losses, show that the flow rate Q is related to the manometer reading h by

$$Q = \frac{A_2}{\sqrt{1 - (D_2/D_1)^4}} \sqrt{\frac{2gh(\rho_M - \rho)}{\rho}}$$

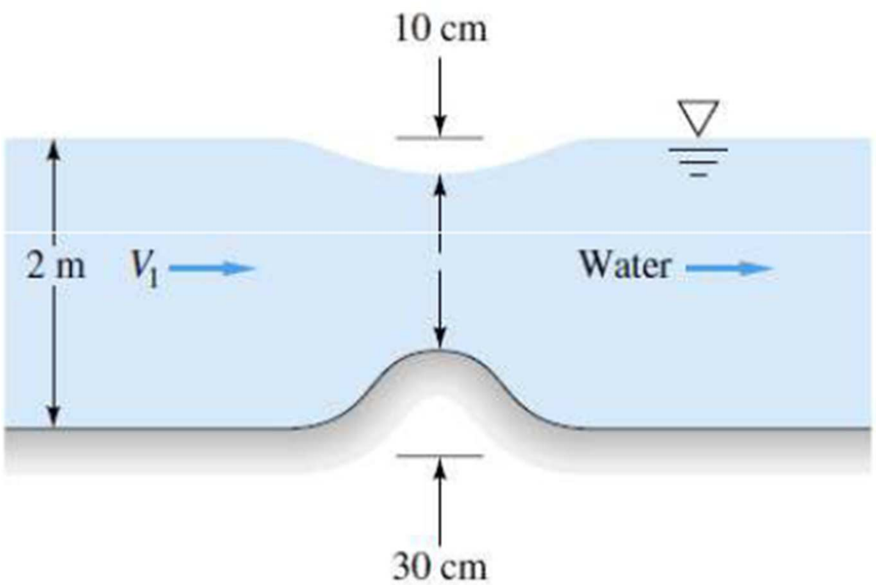
where ρ_M is the density of the manometer fluid.



P3.165

Energiebalans

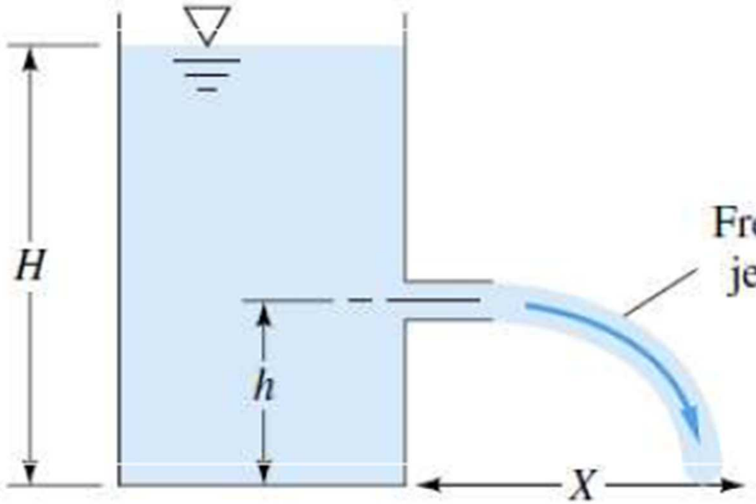
P3.175 If the approach velocity is not too high, a hump in the bottom of a water channel causes a dip Δh in the water level, which can serve as a flow measurement. If, as shown in Fig. P3.175, $\Delta h = 10$ cm when the bump is 30 cm high, what is the volume flow Q_1 per unit width, assuming no losses? In general, is Δh proportional to Q_1?



P3.175

Energiebalans

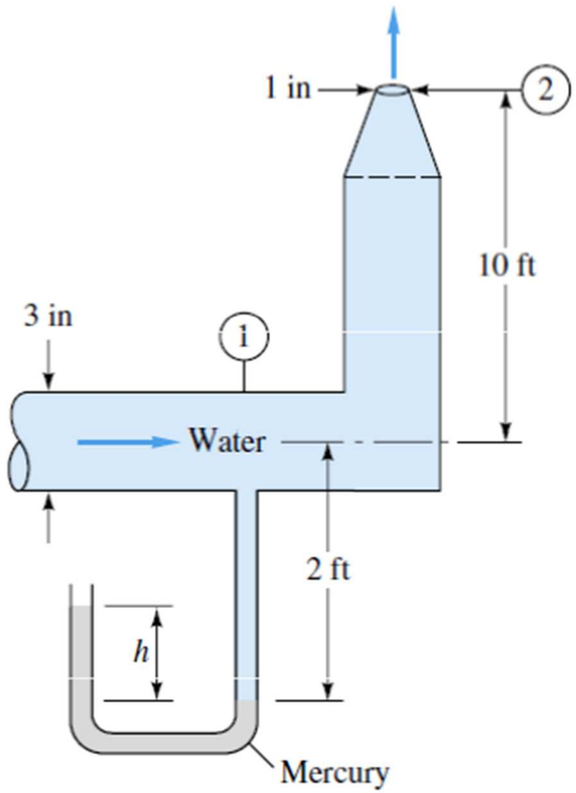
P3.153 For the container of Fig. P3.153 use Bernoulli's equation to derive a formula for the distance X where the free jet



P3.153

leaving horizontally will strike the floor, as a function of h and H. For what ratio h/H will X be maximum? Sketch the three trajectories for $h/H = 0.4$, 0.5, and 0.6.

Energiebalans



P3.168

P3.168 In Fig. P3.168 both fluids are at 20°C. If $V_1 = 1.7$ ft/s and losses are neglected, what should the manometer reading h ft be?

Differentiële balansen

Gegeven een twee-dimensionale incompressibele stroming $\vec{u} = (u, v)$
die een vlakke wand op y=0 nadert.
We krijgen een zogenaamde 'viskeuze stuwpuntstroming',
waarin we voor u vinden $u(x, y) = a \cdot x \cdot y$ met a<0

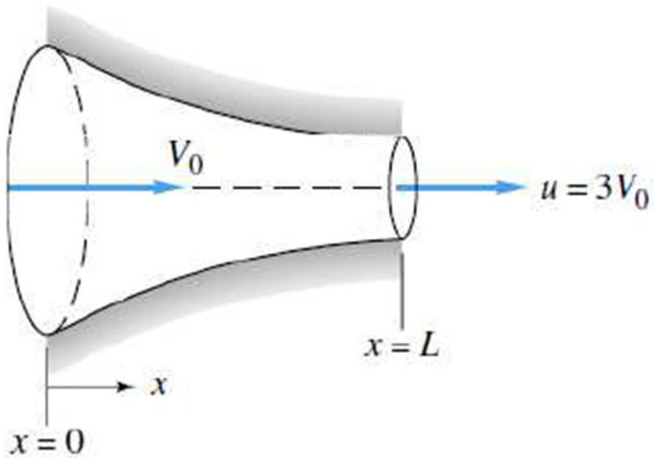
-Bereken $v(x, y)$ uit de differentiële massabalans in elk punt
van de stroming.
- Schets de stroming.

Differentiële balansen

P4.2 Flow through the converging nozzle in Fig. P4.2 can be approximated by the one-dimensional velocity distribution

$$u \approx V_0\left(1 + \frac{2x}{L}\right) \qquad v \approx 0 \qquad w \approx 0$$

(*a*) Find a general expression for the fluid acceleration in the nozzle. (*b*) For the specific case $V_0 = 10$ ft/s and $L = 6$ in, compute the acceleration, in g's, at the entrance and at the exit.



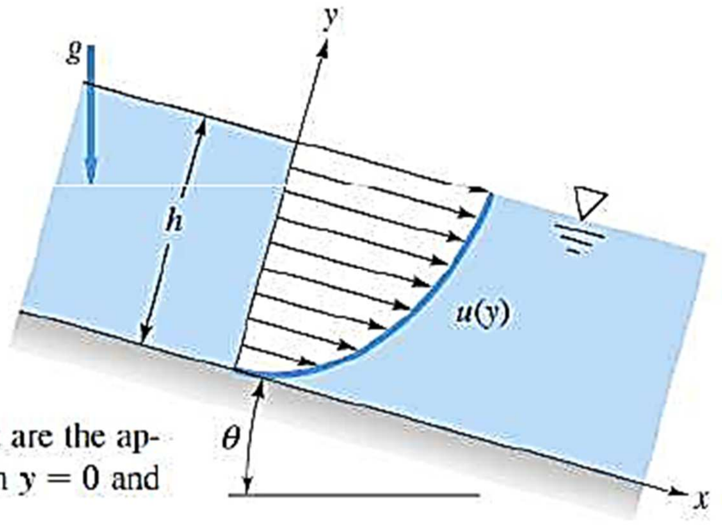
P4.2

Differentiële balansen

P4.36 A constant-thickness film of viscous liquid flows in laminar motion down a plate inclined at angle θ, as in Fig. P4.36. The velocity profile is

$$u = Cy(2h - y) \qquad v = w = 0$$

Find the constant C in terms of the specific weight and viscosity and the angle θ. Find the volume flux Q per unit width in terms of these parameters.



For the draining liquid film of Fig. P4.36, what are the appropriate boundary conditions (a) at the bottom $y = 0$ and (b) at the surface $y = h$?