Tentamen Stromingsleer (wb1225) 1-07-2010, 14.00-17.00 uur

Lees het geheel eerst aandachtig door voor een evenwichtige tijdsbesteding.
Dit tentamen bestaat uit twee delen: Deel 1 en Deel 2.

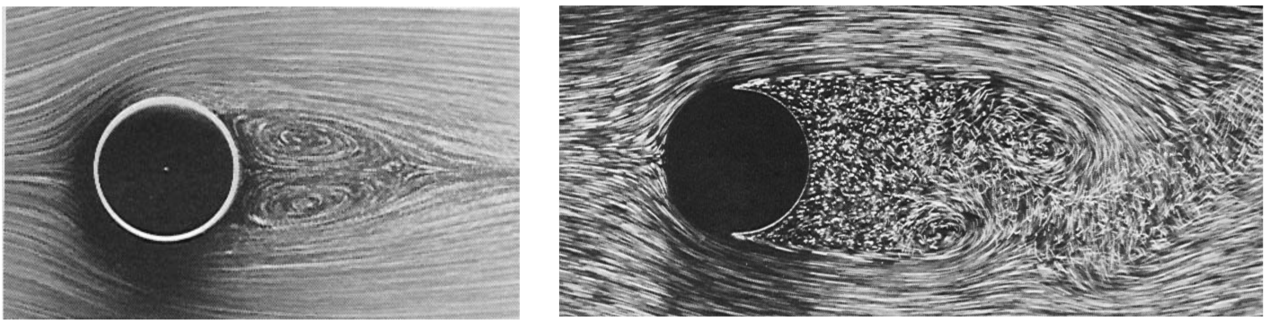
Deel 1 bestaat uit een aantal meerkeuzenvragen. Dit deel staat voor 60% van uw tentamencijfer.
Voor Deel 1 geldt: graag invullen op het apart bijgeleverde formulier.
Let op: de invulvakjes staan niet in volgorde a, b, c, d!
Let op: telkens is maar één antwoord goed.
Let op: bij numerieke waarden is de gevraagde eenheid vet en onderstreept.

Deel 2 bestaat uit twee open vragen. Dit deel staat voor 30% van uw tentamencijfer.
- Graag op het voorblad naam en studienummer invullen, en het aantal ingeleverde vellen papier.
- Maak eventueel een schets zodat ik kan zien dat u een duidelijk idee heeft wat er gebeurt.
- Bij een numeriek antwoord is het aan te bevelen het gebruikte formulewerk op te schrijven.
- De punten die je per (deel) opgave kunt halen staan er bij vermeld.

Géén boeken, kopieën overheadsheets, of eigen formuleblad gebruiken: u krijgt een formuleblad uitgereikt door de surveillanten. Géén mobiele telefoons op tafel; graag uitzetten en in tas laten.
Bewijs middels 'grafische rekenmachine' geldt niet als bewijs.

Tenzij anders vermeld, geldt:
Voor water: dichtheid en dynamische viscositeit bedragen resp. $\rho = 1000$ kg/m^3 en $\mu = 1.0*10^{-3}$ Pa.s.
Voor lucht: dichtheid en dynamische viscositeit bedragen resp. $\rho = 1.2$ kg/m^3 en $\mu = 1.8*10^{-5}$ Pa.s, adiabatische constante en gasconstante bedragen resp. $\kappa = 1.4$, de gasconstante R = 287 J/(kg.K).
De zwaartekrachtsversnelling is 9.81 m/s^2.

Deel 1: meerkeuzevragen



Vraag 1: Beschouw beide bovenstaande visualisaties van een vloeistofstroming rondom een cilinder, en de volgende twe uitspraken daarover:

1) Beide stromingen vertonen loslating.
2) Bij foto 1 is het Reynoldsgetal veel groter dan bij foto 2.

a) Beide zijn waar b) Alleen 1) is waar c) Alleen 2) is waar d) Beide zijn onwaar

1) is evident. 2) is lastiger; het smallere zog ou kunnen suggereren dat we al voorbij de drag crisis zijn (dus een zeer hoog Re). Echter, de mooie symmetrische stroming laat eerder zien dat we met een nog zeer laag Re (van orde 100) te maken hebben. **Antwoord b**.

Vraag 2: Een melasse-watermengsel van dichtheid 1000 kg/m^3 en dynamische viscositeit 0.01 Pa.s stroomt met 0.5 m/s een pijp in met een lengte van 60 m en een diameter van 0.1 m. Na hoeveel **meter** afstand mag de stroming als volledig ontwikkeld, dwz onafhankelijk van de inlaatcondities beschouwd worden?

a) 1.8 b) 5.3 c) 18 d) 30

Inlooplengte: bepaal Re_D = 1000*0.5*0.1/0.01 = 5000. Turbulente stroming. Instroomlengte bedraagt (fb) 4.4*Re_D^(1/6) = 18. ***L* = 1.8 m**.

Vraag 3: water stroomt met een Reynoldsgetal van rond de 10^5 door een goed ontworpen (horizontale) diffusor (uitlaat), waarin het doorstroomoppervlak twee maal zo groot wordt. Bij deze stroming veranderen zowel de (statische) druk als de totaaldruk over de centreline:

a) de statische druk daalt, en de totaaldruk daalt
b) de statische druk stijgt, en de totaaldruk daalt
c) de statische druk daalt, en de totaaldruk stijgt
d) de statische druk stijgt, en de totaaldruk stijgt

Collegestof. In deze stroming wordt geen energie aan de stroming toegevoegd. De totaaldruk kan dus alleen maar dalen langs een stroomlijn. Echter een deel van de kinetische energie wordt wel weer in druk omgezet, dus de statische druk stijgt. Alleen bij een plotselinge volledige verwijding (rechte pijp uitstromend in een vat) blijft de statische druk juist constant. **antwoord b**.

Vraag 4: Lucht stroomt met een debiet van 3.2 m^3/s door een zeer lang ventilatiekanaal van rechthoekige doorsnede 0.8*0.4 m^2. De frictiefactor voor de stroming bedraagt 0.021. Bepaal de drukval over een stuk van 10 meter lengte **in Pa**.

a) 15.8 b) 21.0 c) 23.6 d) 31.5

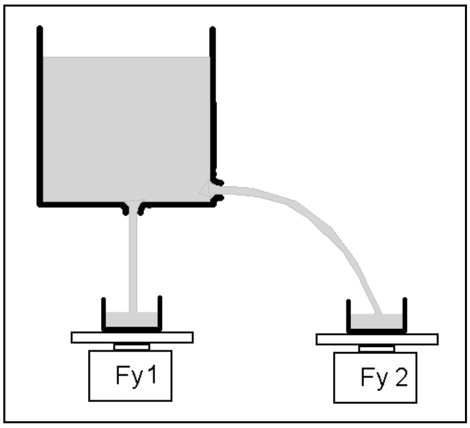
Stroomsnelheid is Q/A = 3.2/(0.4*0.8) = 10 m/s. Drukval uit impulsbalans (of energiebalans):
$(p_1 - p_2) = \Delta p_f = \frac{1}{2}\rho V^2 L / D_H . f$ met de hydraulische diameter; $D_H = 4A/P$ = 4h*b/(2h+2b) = 0.533 m.
Daarmee drukval wordt **Antwoord c**.

Vraag 5: Wesley Sneijder neemt vanaf 11 meter een penalty met de 'Jabulani' voetbal (420 gram, 22 cm diameter). De bal verlaat zijn voet met een beginsnelheid van 30 m/s. De bal heeft bij deze grote snelheid een c_W waarde van slechts 0.42. Hoe groot is de horizontale vertraging die de bal ondervindt **in m/s^2**?

a) 8.6 b) 9.8 c) 17.2 d) 20.5

De luchtweerstand = $F_{D,x} = \frac{1}{2}\rho V^2 C_D A$ = 8.6 N. $a = F/M$ = 20.5 m/s^2; **antwoord d**

Vraag 6: Water stroomt bij benadering wrijvingsloos uit nevenstaand bakje. De twee ronde uitstroomopeningen op gelijke diepte onder water zijn identiek van doorsnede en mooi afgerond. Beide stralen vallen in een bekerglas op de weegschaal (dus een krachtopnemer die alleen de vertikale component van de krachtvector meet). Hiervoor geldt:



a) $F_1 < F_2$ b) $F_1 > F_2$
c) $F_1 \approx F_2$ d) daar is te weinig informatie voor.

Uit energiebehoud: de kinetische energie van beide stralen is identiek, daarmee dus ook hun ansolute snelheid V, en de doorsnede van de straal ter plekke van het waterniveau, A. Bij de linker straal is de vertikale component van de snelheid veel groter dan bij de rechter. Of met de impulsbalans:
$F_Y = \rho A V^2 . \cos(\alpha)$. **antwoord b**.

Vraag 7: Een vloeistof van dichtheid ρ = 800 kg/m^3 stroomt met snelheid U_0 = 4 m/s langs een zeer dunne vlakke plaat. Langs de plaat ontwikkelt zich in de x-richting een grenslaag met dikte $\delta(x)$. Het (tijdsgemiddelde) snelheids-profiel $u(y)$ wordt aan het einde van de plaat, $x = L$, opgemeten met een geschikt instrument. Het blijkt lineair op te lopen, namelijk als $u(y) = U_0 * y/\delta$, en δ = 10 mm. Een aanstromend vloeistof deeltje buiten de grenslaag wordt een stukje van de wand af verdrongen door deze grenslaag, en wel over een afstand, **in mm**, van:

a) 3.33 b) 5 c) 6.67 d) 10

Verdringing is $\delta_1 = \int 1 - u/U = \delta/2$ = 5 mm voor dit driehoekig profiel. **Antwoord b**.

Vraag 8:
De (bovenzijde van de) plaat van de vorige opgave ondervindt een hoeveelheid wrijving door deze grenslaagstroming **<u>in Newton</u>** van:

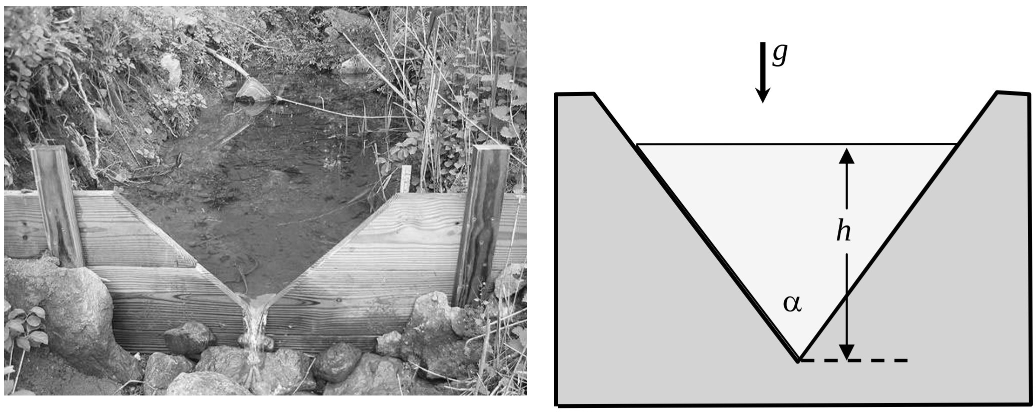
a) 12.4 b) 21.3 c) 32 d) 128

Kracht is $F = \rho U^2 \Theta = \rho U^2 \int (u/U)\cdot(1-u/U)\,dy = \rho U^2 \int (y/\delta)\cdot(1-y/\delta)\,dy = \rho U^2 \delta\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{1}{6}\rho U^2 \delta$
= na invulling <u>21.333 Newton</u>. Het juiste antwoord is dus **<u>antwoord b</u>**.

Vraag 9: De achterspoiler van een racewagen heeft als belangrijkste functie de wagen voldoende ‘downforce’ te geven, waardoor de wielen (bijv. in de bocht) niet slippen. Een bepaald spoilerpakket heeft een achterspoiler met een breedte van 1.50 meter een vleugelkoorde van 0.40 m. Zijn liftcoëfficiënt is getest in een windtunnel, en verloopt volgens $c_L = 2\pi \cdot \sin(\alpha + 10°)$, met α de aanstroomhoek van het spoilerpakket in graden. Bij een test met α = 5^o blijkt de wagen juist bij 20 m/s te gaan slippen. Hierop wordt α ingesteld op 15^o. Hoeveel <u>extra</u> downforce levert de spoiler nu, **<u>in Newton</u>** bij dezelfde 20 m/s?

a) 148 b) 155 c) 157 d) 309

$F_L = \tfrac{1}{2}\rho V^2 C_L A$ Verder gewoon de twee hoeken invullen en het verschil nemen: **<u>antwoord a</u>**.

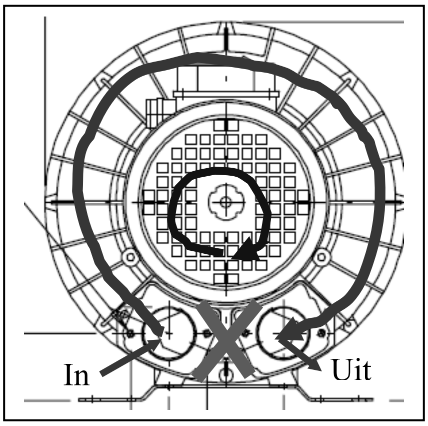


Vraag 9: Water stroomt onder invloed van de zwaartekracht door een driehoekige ‘overlaat’ in een stuw in een beekje. Op enige afstand nog vóór de overlaat staat het waterniveau een hoogte *h* boven de onderpunt van de driehoek Nu is het bekend dat vanaf een minimale hoogte $h_0 << h$ ($h_0 \approx$ enkele mm) het uitstroomdebiet <u>niet</u> meer afhankelijk is van viscositeit of oppervlaktespanning van het water. Als bij *h* = 50 mm het uitstroomdebiet juist 0.5 liter per seconde bedraagt, bepaal dan op basis van dimensie analyse het debiet in **<u>liter per seconde</u>** indien *h* verhoogd wordt tot 60 mm.

a) 0.60 b) 0.66 c) 0.72 d) 0.79

Als voor voldoende grote *h* het debiet Q ([*Q*] = m^3/s) niet afhangt van viscositeit en oppervlaktespanning, dan mogelijk wel van *h* ([*h*] = m), dichtheid ρ ([ρ] = kg.m^{-3}), zwaartekrachtsversnelling *g* ([*g*] = m/s^2), en hoek α ([α] = 1).
Uit het Pi-theorema volgt dat 5 parameters met 3 SI-eenheden 2 Pi-groepen te vormen zijn.
Kijkend naar de dimensies: ρ is de enige met meters (m). Deze ρ is dus niet dimensieloos te krijgen dus houden we 4 parameters met 2 SI-eenheden over, en nog steeds 2 Pi-groepen. Van zichzelf is α al dimensieloos, dus $Pi_2 = \alpha$. We houden 3 parameters met 2 SI-eenheden over, derhalve 1 Pi-groep.
Proberen levert al snel:
$Pi_1 = Q^2/(g.h^5)$; ofwel $Q^2/(g.h^5) = f(\alpha)$, met *f* een verder onbekende functie.
Naar ons probleem toe: Omdat α niet afhangt van de waterhoogte, geldt $Q^2/(g.h^5)$ = Cst. Invullen: $(Q_1/Q_2)^2 = (h_1/h_2)^5$, levert **<u>$Q_2$ = 0.79 l/s</u>**

Deel 2: open vragen



Opgave 21: 16 punten

Hiernaast is een zijkanaalventilator geschetst. Deze pomp kan lucht met 'van alles erin' verpompen (zand, stro, etc.) Van een dergelijke ventilator hangt de luchtopbrengst Q_{Pomp} (het volumedebiet) sterk af van de tegendruk die de ventilator ondervindt; $Q_{Pomp} = Q_0 - f(\Delta p_{Pomp}\ (\text{Pa}))$, en niet meer van viskeuze effecten.

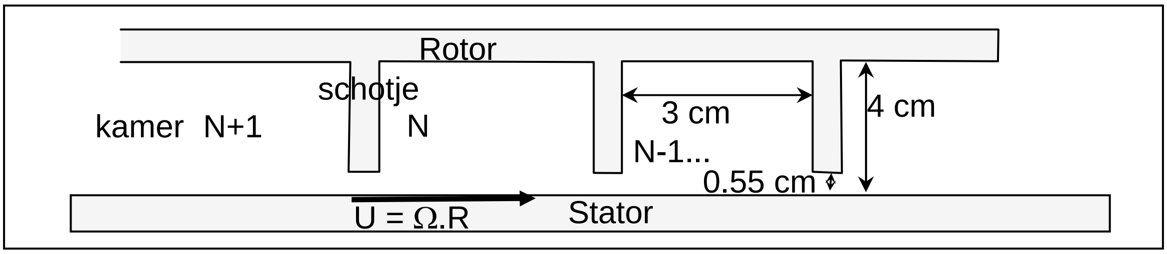
We kijken hier naar het binnenwerk van de ventilator:

- Over de omtrek van de draaiende rotor zit een reeks van 20 kamertjes met schotjes er tussen. Tussen inlaat (het ronde gat linksonder) en uitlaat (het ronde gat rechtsonder) zitten over de omtrek telkens 16 kamertjes met dus 15 tussen-schotjes. Aan de onderzijde (het dikke kruis middenonder) zit een ingenieus mechanisme dat er voor zorgt dat er geen 'kortsluitstroom optreedt: Alle lucht gaat er bij de uitlaat ook daadwerkelijk uit en kan niet meer naar de inlaat terug.

Onze ventilator heeft een toerental van 2820 RPM (is 47 omwentelingen per seconde).
De ventilator kamertjes zijn te beschouwen als rechthoekige doosjes van afmetingen 5.7 cm (diep, loodrecht op papier) * 4 cm (hoog) * 3 cm (breed).

a) **(3)** Laat zien dat zonder tegendruk de pomp het debiet Q_0 = 64 liter lucht per seconde verplaatst.

Het nuldebiet Q_0 = aantal kamers/seconde x kamervolume = 2820/60*20*(5.7*4*3)/1000.



Bij tegendruk (hogere druk aan de uit- dan aan de instrooom) wordt het pompdebiet lager: De druk loopt lineair langs de waaier op: per schotje tussen kamertje N en kamertje N+1 is er een identieke drukstijging Δp_{Kamer}. Er lekt daardoor continu lucht terug naar de opeenvolgende kamertjes. Wij modelleren deze terugstroom (het lekkagedebiet) door een enkel schotje tussen twee kamers te beschouwen. De geometrie is hierboven geschetst. De spleet is hier 5.5 mm 'hoog', het effectieve doorlaat oppervlak is 5.5 mm x 200 mm = $1.1 \cdot 10^{-3}$ m^2.

b) **(4)** Geef een vergelijking voor het lekkagedebiet tussen twee kamertjes, en bepaal hieruit het pompdebiet Q_{Pomp} als functie van tegendruk Δp_{Pomp}, en ook de inverse relatie, Δp afv Q_{Pomp}.

(3) Schets hoe de stroming in zo'n combinatie kamer-spleet-kamer er uit ziet.

(2) Bepaal ook bij welke tegendruk $\Delta p_{Pomp,Max}$ je ventilator juist géén opbrengst meer levert. Hint: je antwoord voor dat laatste zou orde-grootte 25 kPa dienen te bedragen.

Energievergelijking: $p_1 - \left(p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2\right) = 0 \rightarrow p_{N+1} - p_N = \frac{1}{2}\rho V_{Spleet}^2$

Aanname is verder geen verliezen in de spleet; voor uitstroom is de statische druk van de jet gelijk aan de nieuwe totaaldruk.

- Het 'lekkagedebiet' volgt dan uit $Q_{Lek} = A_{Spleet} \cdot V_{Spleet} = A_{Spleet} \cdot \sqrt{2\left(p_{N+1} - p_N\right)/\rho}$, en dus

$$Q_{Pomp} = Q_0 - Q_{Lek} = Q_0 - A_{Spleet} \cdot \sqrt{2\,\Delta p / 15 \cdot \rho}$$

Omgekeerd vinden we $\Delta p = \frac{15 \cdot \rho}{2}\left(\frac{Q_0 - Q_{Pomp}}{A_{Spleet}}\right)^2$

Invullen voor $Q_{pomp} = 0$ levert me (A_{Spleet} is 5.5*200x10^{-6} = 1.1x10^{-3} m^2) een druk van 30.5 kPa.

c) (**4**) Bepaal het mechanisch vermogen (geleverd aan de stroming).
- Maak een schets van dit vermogen als functie van Q_{pomp}.
- Bij welke Q_{pomp} is dit mechanisch vermogen <u>maximaal</u>, en hoeveel bedraagt dit?

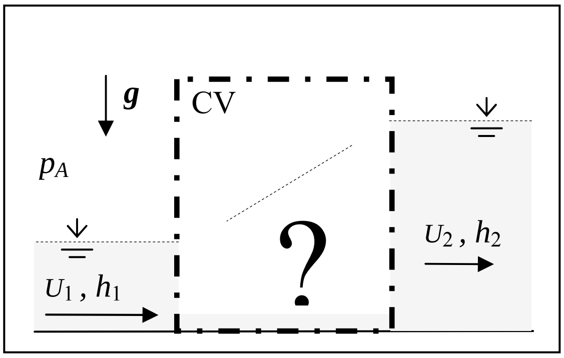
Mechanisch vermogen is $Power_{Pomp} = \Delta p \cdot Q_{Pomp} = \frac{15\rho}{2A_{Spleet}^2} \cdot Q_{Pomp} \cdot \left(Q_0 - Q_{Pomp}\right)^2$

Maximaal?: afgeleide nul: $\frac{\partial Power_{Pomp}}{\partial Q} = 0 \rightarrow \left(Q_0 - Q_{Pomp}\right)^2 - 2Q_{Pomp} \cdot \left(Q_0 - Q_{Pomp}\right) = 0 \rightarrow Q_{Pomp} = \tfrac{1}{3} Q_0$

Bijbehorende power is $Power_{Pomp} = \frac{15\rho}{2A_{Spleet}^2} \cdot \tfrac{2}{9} Q_0^3$ = <u>**433 Watt**</u>.

Opgave 22: 14 punten

In een snelstromende rivier kan soms een ‘watersprong’ ontstaan. Dit is, zoals geschetst, een vrij plotselinge verandering van <u>snelstromend</u> water met een geringe waterdiepte (links) naar <u>langzamer</u> stromend water met een grotere waterdiepte (rechts). We gaan hier proberen aan de hand van het erin geschetste controlevolume CV uit te rekenen aan welke wetten de ‘overgangszone’ in deze stroming moet voldoen. Onze modelrivier heeft een vlakke bodem en een constante breedte b. Het water heeft een dichtheid ρ; boven water heerst de luchtdruk p_A.



a) **(2)** Stel een massabalans op voor het controlevolume, en elimineer de dichtheid hieruit.

Onsamendrukbaar, Massabehoud 1D: $\rho_1.U_1.h_1 = \rho_2.U_2.h_2 \rightarrow \underline{U_1.h_1 = U_2.h_2}$

b) **(4)** Bepaal het hydrostatische druk<u>profiel</u> over de hoogte op de linker- en op de rechterwand van het controlevolume, en bepaal daaruit <u>door integratie</u> de netto kracht die door drukkrachten op het controlevolume (in de x-richting) uitgeoefend wordt.

De druk aan het oppervlak is atmosferisch, en neemt lineair (hydrostatisch) toe. Links resp. rechts vinden we: $p = p_A + \rho.g.\left(h_1 - z\right); p = p_A + \rho.g.\left(h_2 - z\right)$.

De kracht veroorzaakt door de druk op een paneel vinden we door integratie van de druk:

$F_x = \int p\left(z\right).dz.b = \int_0^h \rho.g.\left(h - z\right).dz.b = \underline{\rho.g.\tfrac{1}{2}h^2.b}$.

Daarmee wordt de <u>netto kracht</u> door druk: $F_x = \rho.g.\tfrac{1}{2}h_1^2.b - \rho.g.\tfrac{1}{2}h_2^2.b = \underline{\rho.g.\tfrac{1}{2}\left(h_1^2 - h_2^2\right).b}$

c) **(4)** Stel een <u>impulsbalans</u> op voor het controlevolume. Als je wrijving met de bodem mag verwaarlozen, elimineer dan U_2 m.b.v. je resultaat uit a) en laat dan zien dat geldt:

$h_2/h_1 = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} + 2.U_1^2/gh_1} = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} + 2.Fr_1^2}$,

waarbij Fr het <u>Froudegetal,</u> $Fr = \sqrt{U/gh}$ wordt genoemd.

Hint: je krijgt een 3^e graadsvergelijking: Maar met de truc $\left(1 - a/b\right) = \left(a/b\right).\left(b/a - 1\right)$ is een flinke vereenvoudiging te bereiken; $h_2/h_1 = 1$ is een oplossing die je mag wegdelen.

(2) Maak een grafiek van deze relatie voor de range $0 < Fr_1 < 5$.

De stroming is stationair; daarmee is de netto impulstoename of afname in de tijd voor het CV nul, dus luidt de integrale impulsbalans:

$\frac{d}{dt}\int_V \rho.u_x.dV = \int_A (\rho.u_x).(-\vec{u}\cdot\vec{n}).dA + \sum F_{x,druk} + \sum F_{x,wrijving}$ Stationair; en verwaarloos wrijving:

$\rightarrow 0 = (\rho.U_1).(U_1.h_1.b) - (\rho.U_2).(U_2.h_2.b) + \rho.g.\tfrac{1}{2}(h_1^2 - h_2^2).b$

delen door ρ.*b*; m.b.v. de massabalans U_2 wegwerken: $h_1.U_1^2 - h_2.U_1^2.h_1^2/h_2^2 + g.\tfrac{1}{2}(h_1^2 - h_2^2) = 0$

delen door $g.h_1^2$; vervangen $Fr = U_1^2/g.h_1$: $Fr - Fr.h_1/h_2 + \tfrac{1}{2}(1 - h_2^2/h_1^2) = 0$

dit lijkt een 3e graads vgl. in h_2/h_1; het vervolg is dan ook lastig te vinden, maar met de hint: $(1 - a/b) = (a/b).(b/a - 1)$, op het linkerlid vereenvoudigt dit tot:

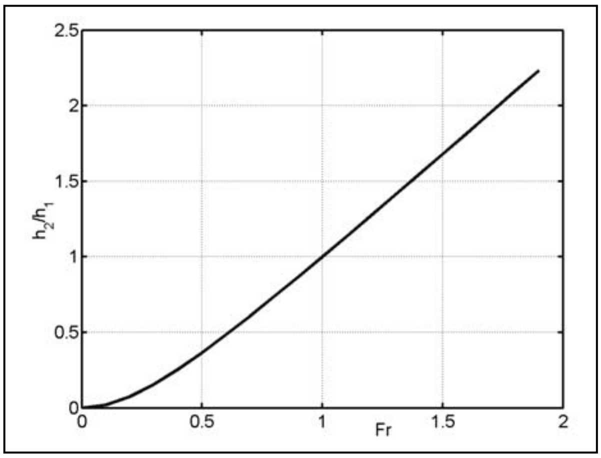
$\rightarrow Fr\cdot(h_1/h_2)\cdot(h_2/h_1 - 1) + \tfrac{1}{2}(1 - h_2/h_1)\cdot(1 + h_2/h_1) = 0$

$\rightarrow Fr\cdot(h_1/h_2) - \tfrac{1}{2}\cdot(1 + h_2/h_1) = 0 \rightarrow Fr - \tfrac{1}{2}\left(h_2/h_1 + (h_2/h_1)^2\right)$

$\rightarrow h_2^2/h_1^2 + h_2/h_2 - 2Fr = 0$; en met de ABC-formule

vinden we: $h_2/h_1 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 8.Fr_1^2}}{2}$, waarvan alleen de positieve oplossing interessant is.

Deze relatie zie je hieronder: We kunnen in ieder geval zien dat voor $Fr_1 = 1$ juist geldt $h_2/h_1 = 1$; voor $Fr_1 < 1$ geldt $h_2 < h_1$, en voor $Fr_1 > 1$ geldt $h_2 > h_1$.



We kunnen de mechanische (potentiële + kinetische) energie *E* van deze stroming schrijven als de totaaldruk, $E = (p_A) + \rho gh + \tfrac{1}{2}\rho U^2$. De energieverandering over een watersprong kan met onze eerdere resultaten geschreven worden als (dit hoeft u niet aan te tonen):

$(E_1 - E_2)/\rho.g = (h_2 - h_1)^3 / 4h_1.h_2$

d) **(2)** Beargumenteer dat hieruit volgt dat inderdaad altijd $h_2 > h_1$, en dat een watersprong dus alléén kan optreden voor $Fr_1 > 1$.

De totaaldruk van dit systeem kan niet toenemen zonder dat er ergens arbeid op het systeem verricht wordt. Wél kan de energie afnemen; bijvoorbeeld doordat kinetische energie van de stroming (via turbulente wervels) wordt omgezet in warmte. Er geldt dus dat $E_2 < E_1$, en vanwege de gegeven derdemachtsrelatie dat $h_1 < h_2$. We hebben boven al gezien dat dit impliceert dat $Fr_1 > 1$. Zo'n stroming heet superkritisch te zijn; de verdere fysica van dergelijke stroming is met name belangrijk voor civiel en maritiem ingenieurs.

Afleiding: Neem totaaldruk, elimineer Fr2, en vul relatie voor Fr1 in. Verder stug doorschrijven:

$$\frac{E_1 - E_2}{\rho g} = h_1 - h_2 + \tfrac{1}{2}\left(h_1 - h_1 (h_1/h_2)^2\right) Fr_1^2 == h_1 - h_2 + \tfrac{1}{16}\left(h_1 - h_1 (h_1/h_2)^2\right)\left((2h_2/h_1 + 1)^2 - 1\right)$$

$$= h_1 - h_2 + \tfrac{1}{16}\left(h_1 h_2^2 - h_1^3\right)\left(\frac{4}{h_1^2} + \frac{4}{h_1 h_2}\right) = h_1 - h_2 + \tfrac{1}{4}\left(h_2^2 - h_1^2\right)\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) = \frac{(h_2 + h_1)(h_2^2 - h_1^2) + 4h_1^2 h_2 - 4h_1 h_2^2}{4h_1 h_2}$$

$$= \frac{\left(h_2^3 - 3h_1 h_2^2 + 3h_1^2 h_2 - h_1^3\right)}{4h_1 h_2} = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1 h_2}$$