

Systeemidentificatie

Dictaat bij het college wb2301

Ton van Lunteren

September 1995

Inhoudsopgave

1 INLEIDING

2 STOCHASTISCHE PROCESSEN IN HET FREQUENTIEDOMEIN

- 2.1 Een gemodificeerde Fouriertransformatie
- 2.2 Enkele relaties tussen spectrale dichtheden in een gesloten keten
- 2.3 Het beschrijvende functie model in de gesloten keten
- 2.4 Systemen met meerder in- en uitgangen
- 2.5 Recapitulatie

3 TRANSFORMEREN VAN BEMONSTERDE SIGNALEN NAAR HET FREQUENTIEDOMEIN

- 3.1 De diracfunctie en de kam van dirac
 - 3.1.1 De diracfunctie opnieuw bekeken
 - 3.1.2 De kam van dirac
 - 3.1.3 Recapitulatie diracfunctie en kam van dirac
- 3.2 Bemonsterde signalen
 - 3.2.1 Transformatie van bemonsterde signalen naar het frequentiedomein
 - 3.2.2 Het theorema van Shannon
 - 3.2.3 Recapitulatie bemonsterde signalen
- 3.3 De Diskrete Fourier Transformatie en de Fast Fourier Transform
 - 3.3.1 De Diskrete Fourier Transformatie (DFT)
 - 3.3.2 De Fast Fourier Transform (FFT)
 - 3.3.3 Recapitulatie DFT en FFT
- 3.4 De z-transformatie
 - 3.4.1 Afleiding van de z-transformatie uitgaande van de laplacetransformatie
 - 3.4.2 Enkele eigenschappen van de z-transformatie
 - 3.4.3 Toepassing van de z-transformatie voor de beschrijving van diskrete systemen
- 3.5 Relatie tussen een aantal transformaties en vormen van systeembeschrijving
 - 3.5.1 Van z-transformatie naar DFT
 - 3.5.2 Overzicht van transformaties
 - 3.5.3 Systemen, transformatievariabelen en operatoren
- 3.6 Diskrete ruis
 - 3.6.1 Gefilterde diskrete witte ruis
 - 3.6.2 Het Auto-Regressieve filter
 - 3.6.3 Het "Moving Average" filter
 - 3.6.4 Het Auto-Regressief Moving Average filter
 - 3.6.5 Verband tussen de impulsresponsie van het filter en de autocorrelatiefunctie van het daardoor gekarakteriseerde proces
 - 3.6.6 Recapitulatie diskrete ruis

4 SCHATTEN VAN COVARIANTIEFUNKTIES EN VERWANTE GROOTHEDEN EN VAN SPECRALE DICHTHEDEN

- 4.1 Schatten van functies van stochastische processen in het tijdsdomein
 - 4.1.1 Schatters voor gemiddelde produktfuncties, covariantiefuncties en correlatiefuncties
 - 4.1.2 Eigenschappen van de beschouwde schatters
 - 4.1.3 Recapitulaties van schatters van functies van stochastische processen in het tijdsdomein
- 4.2 Schatten van spectrale dichtheden via de covariantiefunctie
 - 4.2.1 Een ruwe schatter gebaseerd op transformatie van een covariantiefunctie
 - 4.2.2 Een praktisch bruikbare schatter via een geschatte covariantiefunctie
 - 4.2.3 Transformatievensters
 - 4.2.4 Recapitulatie schatten via de covariantiefunctie
- 4.3 Schatten van spectrale dichtheden via transformatie van signalen
 - 4.3.1 Een ruwe schatter gebaseerd op transformatie van signalen
 - 4.3.2 Een praktisch bruikbare schatter via transformatie van signalen
 - 4.3.3 Recapitulatie schatten via getransformeerde signalen

5 EIGENSCHAPPEN VAN DE SCHATTERS VOOR SPECTRALE DICHTHEDEN, OVERDRACHTFUNKTIES EN COHERENTIES

- 5.1 De schatter voor de spectrale dichtheid
- 5.2 De schatter voor de overdrachtsfunctie
- 5.3 De schatter voor de coherentiefunctie
- 5.4 Recapitulatie eigenschappen van schatters in het frequentiedomein

1 INLEIDING

Het vak "Systeemidentificatie A" is een vervolg op het vak "Systemen, Signalen, Stochastiek". Dit laatste vak behandelt de methoden om, uit gemeten in- en uitgangssignalen, de overdrachtsfunctie van een lineair systeem, dan wel de beschrijvende functie van een niet-lineair systeem, te bepalen. Het eerste gedeelte behandelt de technieken die gebaseerd zijn op het gebruik van een deterministisch ingangssignaal en die nog vanuit een deterministische beschouwingwijze af te leiden zijn. Het tweede gedeelte, de waarschijnlijkheidsrekening, de schattingstheorie en de stochastiek vormen de theoretische basis voor het identificeren aan de hand van niet-deterministische ingangssignalen. De daar behandelde theorie geeft echter slechts de basis van de methoden voor systeemidentificatie. De praktische toepassing vraagt een uitbreiding van de theorie welke wordt gegeven in dit vak, dat voornamelijk is bedoeld voor hen die in de meet- en regeltechniek willen afstuderen of op een andere manier met de praktische toepassing in aanraking komen.

Hoofdstuk 2 is nog voornamelijk een uitbreiding van de in SSS behandelde theorie naar de toepassing in complexere systemen. Deze theorie is nog steeds gebaseerd op kennis van meerdimensionale verdelingsdichtheidsfuncties, die grootheden opleveren welke gebaseerd zijn op verwachtingswaarden. Dit zijn dan o.a. covariantiefuncties en spectrale dichtheden.

In de praktijk beschikt men slechts over één realisering van een stochastisch proces, die bovendien slechts over een eindig tijdsinterval bekend is. Om de relatie te kunnen leggen tussen een enkele realisering van een stochastisch proces in de vorm van een gemeten signaal en het stochastische proces als geheel is reeds in het vak SSS het begrip ergodiciteit geïntroduceerd.

De eindige observatietijd introduceert een bepaalde onzekerheid. Verder is het zo, dat de gemeten continue signalen moeten worden bemonsterd, dat wil zeggen omgezet in een getallenrij om ze te kunnen verwerken met behulp van een digitale rekenmachine. Dit moet echter wel zodanig worden gedaan dat enerzijds geen informatie verloren gaat, anderzijds niet met onnodig lange getallenrijen wordt gewerkt. Al deze aspecten vragen een uitbreiding van de theorie, welke zal worden behandeld in de hoofdstukken 3 tot en met 5.

Hoofdstuk 3 is gewijd aan het bemonsteren van signalen gevolgd door transformatie naar het frequentiedomein. Hoofdstuk 4 behandelt langs welke wegen tot een schatting van spectrale dichtheden kan worden gekomen en wat de consequenties zijn voor de gevonden resultaten.

Hoofdstuk 5 geeft relaties voor de variantie van de aldus verkregen schatters voor de spectrale dichtheid. Hiervan uitgaande worden ook de schatters voor een overdrachtsfunctie en een coherentiefunctie behandeld, eveneens met de daarbij behorende betrouwbaarheidsmaten.

De toegepaste notatie sluit in grote lijnen aan bij die welke in het dictaat "Systemen, Signalen, Stochastiek" werd toegepast, zij het dat enkele vereenvoudigingen zijn geïntroduceerd. Zo worden in dat dictaat stochastische processen aangeduid met een streep boven de letter en de toevoeging ζ , dus $\bar{x}(t; \zeta)$ en $\bar{y}(t; \zeta)$. Realiseringen worden aangeduid met $\bar{x}(t; \zeta_i)$ en $\bar{y}(t; \zeta_i)$. Functies, die bij deze processen horen, krijgen een overgestreepte index zoals $\bar{R}_{\bar{x}\bar{y}}(\tau)$, $\bar{C}_{\bar{x}\bar{y}}(\tau)$ en $\bar{K}_{\bar{x}\bar{y}}(\tau)$.

In dit dictaat, "Systeemidentificatie A", zijn de streepjes weggelaten als een ζ aanwezig was, d.w.z. bij de stochastische processen en hun realiseringen in tijdsdomein en frequentiedomein, dus $x(t; \zeta)$ en $X(\zeta; ?)$ of $X(?, \zeta)$ voor een stochastisch proces en $x(t; \zeta_i)$ en $X(\zeta; \zeta_i)$ of $X(\zeta_i; ?)$ voor realiseringen van stochastische processen.

Tenslotte nog iets over de aard van het vak. De essentie hiervan is in het kort te omschrijven als "het op een verstandige manier leren omgaan met onzekerheden". In dit opzicht onderscheidt dit college zich van vele andere vakken in de opleiding voor werktuigkundig ingenieur waar veelal één weg van probleemstelling naar oplossing leidt. Als de student voor de juiste formule kiest en daar de gegevens invult komt er een éénduidig antwoord uit. Met behulp van een aantal oefensommen kan de student vervolgens zijn rekenvaardigheid testen, al of niet met behulp van een computer. Het vak Systeemidentificatie wordt eveneens met behulp van de computer beoefend. Inmiddels zijn hiervoor de nodige pakketten beschikbaar. Echter het toepassen hiervan zonder voorkennis leidt in de meeste gevallen tot een betekenisloze uitkomst. Essentieel is namelijk dat een verstandige keuze gedaan wordt bij het verwerken van gemeten signalen. Hiervoor is inzicht in de theorie nodig om te weten in welke gevallen een bepaalde methode bruikbaar is en in welke niet. Het is dan ook geen vak om te leren rekenen, maar om te leren nadenken en eigenlijk is dat ook hetgene wat van een ingenieur moet worden verwacht.

2 STOCHASTISCHE PROCESSEN IN HET FREQUENTIEDOMEIN

In hoofdstuk 5 van het dictaat "Systemen, Signalen, Stochastiek" zijn enkele relaties afgeleid die het mogelijk maken de overdrachtsfunctie van een lineair systeem te bepalen in een open- of gesloten keten en de beschrijvende functie van een niet-lineair systeem in een open keten.

De tot nog toe gevolgde gedachtengang om te komen tot een beschrijving van relaties tussen stochastische processen en systemen kan als volgt worden gerecapituleerd.

Een stochastisch proces is gedefinieerd als een verzameling uitkomsten van een kansproces, waarbij de uitkomsten niet een getal zijn maar een functie van de tijd. Ze worden gekarakteriseerd door een tijdparameter t en een ensemble parameter τ .

Stochastische processen worden beschreven door deterministische grootheden namelijk hun distributiefuncties of de afgeleiden daarvan hun verdelingsdichtheidsfuncties. Voor stationaire stochastische processen zijn deze grootheden een functie van twee amplitudeparameters en een tijdparameter. Zo worden twee stochastische processen $x(t; \tau)$ en $y(t; \tau)$ met hun onderlinge relatie gekarakteriseerd door de verdelingsdichtheidsfuncties

$$f_{x_1 x_2}^{\tau} (x_1, x_2; \tau), f_{y_1 y_2}^{\tau} (y_1, y_2; \tau) \text{ en } f_{xy}^{\tau} (x, y; \tau).$$

Uitgaande van deze deterministische functies kunnen andere deterministische grootheden worden afgeleid, zoals gemiddelde produktfuncties, covariantiefuncties en correlatiefuncties. Deze laatste grootheden kunnen weer worden afgebeeld in het frequentiedomein. Dit levert de spectrale dichtheden en de coherentiefunctie. Eén en ander is schematisch afgebeeld in fig. 2.1.

Relaties tussen de deterministische grootheden waarmee stochastisch processen gekarakteriseerd worden, zijn afhankelijk van de eigenschappen van tussenliggende systemen. In het tijdsdomein zijn dit altijd convolutieintegralen. Voor heel eenvoudige gevallen zijn deze nog wel te beschrijven. In samengestelde systemen wordt dit echter een moeilijke, zo niet onmogelijke, zaak. In het frequentiedomein daarentegen worden dit eenvoudige vermenigvuldigingen en delingen. De vraag rijst dan ook of het mogelijk is stochastische processen direct te transformeren naar het frequentiedomein, ze daar te karakteriseren door nieuwe verdelingsdichtheidsfuncties, om vervolgens langs deze weg tot spectrale dichtheden te komen. Deze weg is in fig. 2.1 met streeplijnen en vraagtekens aangeduid. In eerste instantie is het antwoord op deze vraag nee, zoals uit par 2.1 zal blijken. Het zal echter ook blijken dat, na het introduceren van een gemodificeerde fouriertransformatie, deze weg wel gevolgd kan worden, mits de beschouwde stochastische processen behalve stationair ook ergodisch zijn.

In par 2.2 wordt met behulp van in het frequentiedomein gevonden relaties een nader onderzoek ingesteld naar mogelijke problemen bij identificatie in een gesloten keten. In par. 2.3 wordt nader ingegaan op identificatie van de beschrijvende functie van een niet lineair systeem in een gesloten keten. In par. 2.4 worden de tot nog toe voor het scalaire geval afgeleide relaties voor het identificeren van een systeem geëxtrapoleerd naar het geval van multivariabele systemen.

2.1 Een gemodificeerde fouriertransformatie

De kruisspectrale dichtheid van twee stationaire stochastische processen $x(t; \tau)$ en $y(t; \tau)$ is gedefinieerd als:

$$S_{xy}^{\tau}(f) = F\{C_{xy}^{\tau}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xy}^{\tau}(t\tau) e^{-j2\pi f t} dt.$$

met, voor het geval dat de gemiddelde waarden nul zijn,

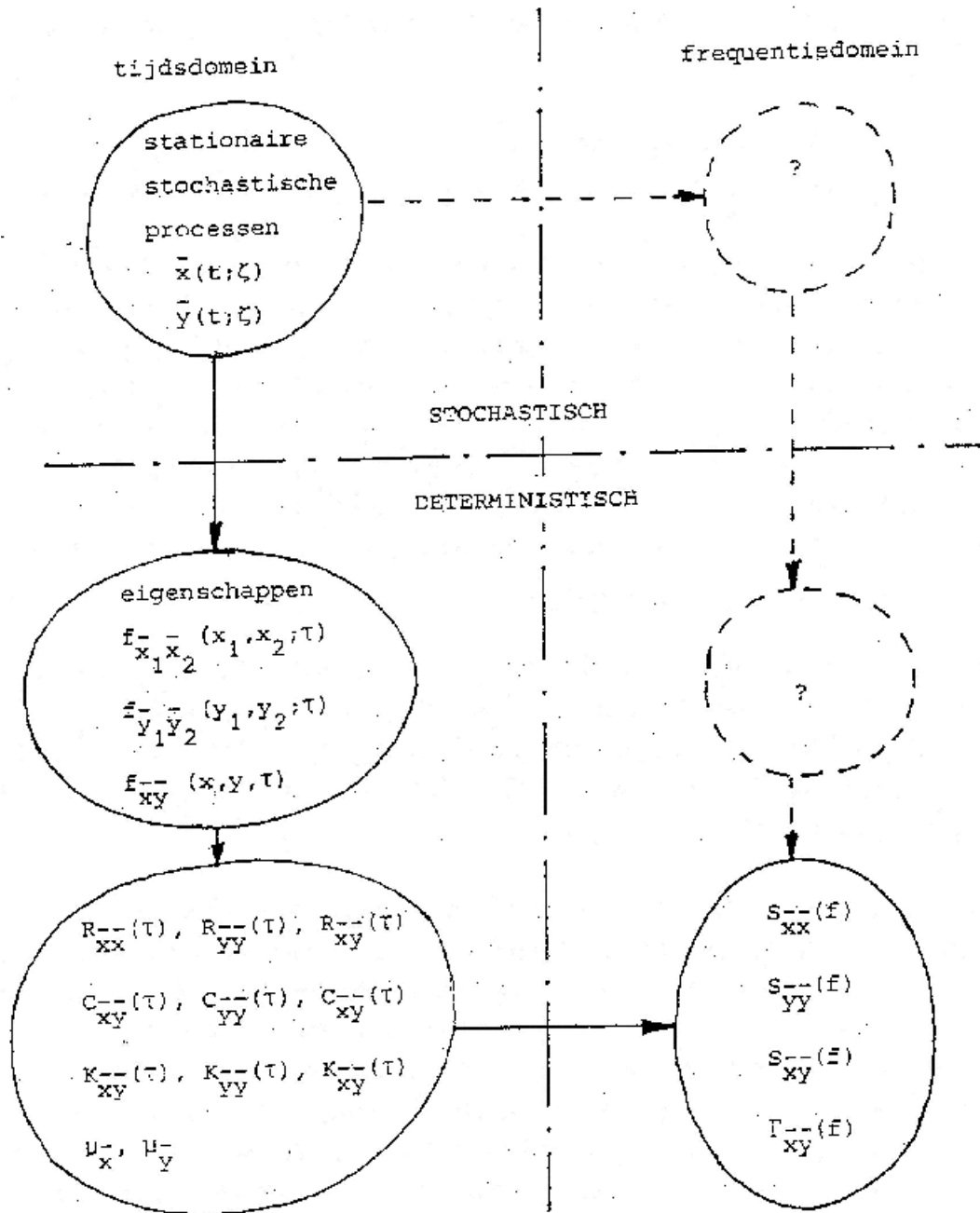
$$C_{xy}^{\tau}(\tau) = E\{x(t; \zeta) y(t+\tau; \zeta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x y f_{xy}^{\tau}(x, y; \tau) dx dy$$

Als de processen ergodisch zijn geldt echter ook dat:

$$C_{xy}^{\tau}(\tau) = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t; \zeta) y(t+\tau; \zeta) dt \right\}$$

In deze uitdrukking is T de voor integratie beschikbare tijd. Bij een signaallengte T_0 en een tijdverschuiving τ is deze gelijk aan $T = T_0 - |\tau|$, zie ook paragraaf 5.1.4 van het dictaat Systemen, Signalen, Stochastiek over ergodiciteit.

De formule beschrijft de verwachtingswaarde van een schatter $\hat{C}_{\bar{x}\bar{y}}(\tau, \zeta)$ die gebaseerd is op een middeling over een oneindig lange tijd d.w.z.



Figuur 2.1: Beschrijving van stochastische processen in tijdsdomein en frequentiedomein met behulp van deterministische grootheden.

$$C_{xy}^{-}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} r f_r^{-}(r, \tau) dr.$$

Hierin is $f_r^{-}(r, \tau)$ de verdelingsdichtheidsfunctie van het hiervoor gedefinieerde stochastische proces $\hat{C}_{xy}^{-}(\tau, \zeta)$. Aangezien deze $\hat{C}_{xy}^{-}(\tau, \zeta)$ de asymptotische waarde van een asymptotisch rake schatter vertegenwoordigt, wordt deze verdelingsdichtheidsfunctie gekarakteriseerd door de diracfunctie

$$f_r^{-}(r; \tau) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[r - C_{xy}^{-}(\tau)]^2}{2a^2}} = \delta\{r - C_{xy}^{-}(\tau)\}$$

Invullen van deze beschrijvingswijze van $C_{xy}^{-}(\tau)$ in de definitie van $S_{xy}^{-}(f)$ levert:

$$S_{xy}^{-}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} E \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t; \zeta) y(t+\tau; \zeta) dt \right\} e^{-j2\pi f \tau} d\tau.$$

Schrijf nu $e^{-j2\pi f t}$ als $e^{-j2\pi f(t+\tau)} e^{j2\pi f \tau}$ en verwissel de integratievolgorde. Dan geldt:

$$S_{xy}^{-}(f) = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t; \zeta) e^{j2\pi f t} \left[\int_{-T/2}^{T/2} y(t+\tau; \zeta) e^{-j2\pi f(t+\tau)} d\tau \right] dt \right\}.$$

Voer nu een nieuwe variabele in: $t' = t + \tau$. In de binnenste integraal is t constant zodat $dt' = dt$. Voor deze integraal veranderen nu ook de grenzen: De grens $\tau = T/2$ wordt nu $t' = t + T/2$ en $\tau = -T/2$ wordt $t' = t - T/2$. Dit leidt tot:

$$S_{xy}^{-}(f) = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t; \zeta) e^{-j2\pi(-f)t} \left[\int_{t-T/2}^{t+T/2} y(t'; \zeta) e^{-j2\pi f t'} dt' \right] dt \right\}.$$

Voor een stationair stochastisch proces moet de binnenste integraal voor $T \rightarrow \infty$ voor elke waarde van t dezelfde uitkomst opleveren. Daarom mag een constante waarde $t=0$ in de integratiegrenzen worden gekozen. De twee integralen zijn daardoor nu onafhankelijk van elkaar geworden, dus

$$S_{xy}^{-}(f) = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^{T/2} x(t; \zeta) e^{-j2\pi(-f)t} dt \right] \left[\int_{-T/2}^{T/2} y(t'; \zeta) e^{-j2\pi f t'} dt' \right] \right\}.$$

De uitdrukkingen tussen vierkante haken suggereren dat hier sprake is van respectievelijk de fouriergetransformeerde van $x(t; ?)$ voor de frequentie $-f$ en de fouriergetransformeerde van $y(t; ?)$ voor de frequentie f . Noem deze termen voor het gemak $t_x(-f; ?)$ en $t_y(f; ?)$, dan staat er:

$$S_{xy}^{-}(f) = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} t_x(-f; \zeta) t_y(f; \zeta) \right\}.$$

Uitgaande van het feit dat $S_{xy}^{-}(f)$ eindig is $\forall f$ en dat T naar ∞ gaat levert dit

$$S_{xy}(f) = \frac{t_x(-f; \zeta) t_y(f; \zeta)}{\infty} = \text{eindig}.$$

Dit kan alleen als ook de teller naar ∞ gaat voor elke waarde van f . De conclusie is dan ook dat $x(t; ?)$ en $y(t; ?)$ niet fouriergetransformeerd kunnen worden. Een aanwijzing hiervoor is dat ze ook niet voldoen aan de voldoende eis. Voor stationaire ruissignalen geldt immers

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t; \zeta)| dt = \infty.$$

Om het gerezen probleem op te lossen wordt nu voor realiseringen van stochastische processen een gemodificeerde fouriertransformatie gedefinieerd, namelijk:

$$F_s\{x(t; \zeta)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} x(t; \zeta) e^{-j2\pi f t} dt = X(f; \zeta).$$

Het enige verschil met de bestaande fouriertransformatie is, dat de te transformeren signalen een normeringsconstante hebben meegekregen die er voor zorgt dat de operator $F_s\{\dots\}$ een eindige éénduidige waarde oplevert. Op zich is dit niets nieuws wanneer deze transformatie wordt vergeleken met de eerder behandelde wijzen van afbeelden in het frequentiedomein:

Fourierreeks
$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk 2\pi t/T} dt;$$

Fouriertransformatie:
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt;$$

Gemodificeerde Fouriertransformatie
$$X(f; \zeta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} x(t; \zeta) e^{-j2\pi ft} dt$$

Gebruik makend van de gemodificeerde fouriertransformatie is de kruisspectrale dichtheid voor stationaire ergodische processen te schrijven als:

$$S_{xy}^{-}(f) = E\{X(-f; \zeta) Y(f; \zeta)\}.$$

Voor het geval dat $y(t; \zeta) = x(t; \zeta)$ ontstaat de overeenkomstige uitdrukking voor autospectrale dichtheden, namelijk

$$S_{xx}^{-}(f) = E\{X(-f; \zeta) X(f; \zeta)\}.$$

Het praktisch nut van de aldus geopende weg is zeer groot. In theoretische beschouwingen over relaties in samengestelde systemen kunnen nu op zeer eenvoudige wijze relaties tussen spectrale dichtheden en overdrachtsfuncties worden afgeleid. Dit zal worden geïllustreerd in de volgende paragrafen.

2.2 Enkele relaties tussen spectrale dichtheden in een gesloten keten

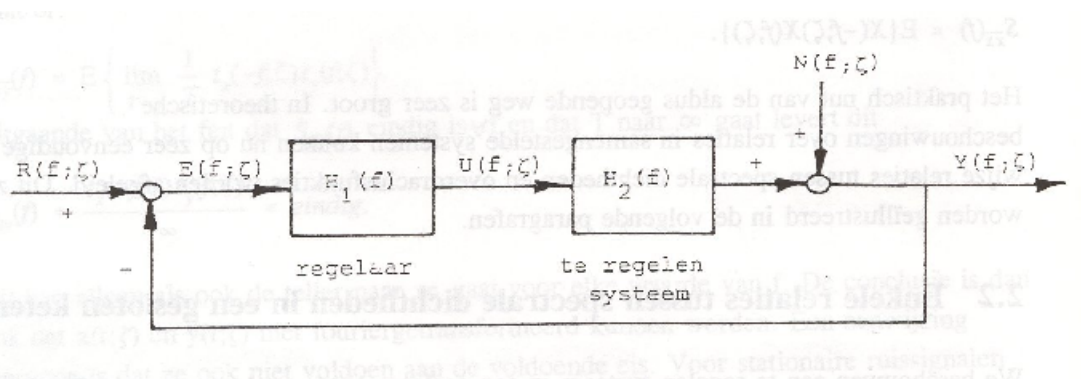
We beschouwen een te regelen systeem in een gesloten keten zoals gegeven in fig. 2.2. Voor dit systeem geldt dat de verstoring $n(t; \zeta)$ ongecorreleerd is met de ingang $r(t; \zeta)$ van het teruggekoppelde systeem als geheel. In hoofdstuk 5 van het dictaat Systemen, Signalen, Stochastiek is afgeleid dat $H_2(f)$ te bepalen is uit:

$$H_2(f) = \frac{S_{ry}^{-}(f)}{S_{ru}^{-}(f)}.$$

Stel dat iemand abusievelijk de formule voor de open keten gebruikt en op deze wijze een overdrachtsfunctie $H_2'(f)$ bepaalt volgens:

$$H_2'(f) = \frac{S_{uy}^{-}(f)}{S_{uu}^{-}(f)}.$$

De vraag is nu, wat de gemaakte fout is en waardoor deze wordt bepaald. Dit probleem kan worden aangepakt door de spectrale dichtheden $S_{uy}^{-}(f)$ en $S_{uu}^{-}(f)$ uit te drukken in de spectrale dichtheden $S_{rr}^{-}(f)$ en $S_{nn}^{-}(f)$ van de van buiten af binnenkomende onderling ongecorreleerde signalen $r(t; \zeta)$ en $n(t; \zeta)$. Gebruik makend van de gemodificeerde fouriertransformatie kan gesteld worden dat:



2.2: Een te regelen systeem in een gesloten keten.

$$U(f; \zeta) = \frac{H_1(f)}{1 + H_1(f)H_2(f)} R(f; \zeta) - \frac{H_1(f)}{1 + H_1(f)H_2(f)} N(f; \zeta)$$

$$Y(f; \zeta) = \frac{H_1(f)H_2(f)}{1 + H_1(f)H_2(f)} R(f; \zeta) + \frac{1}{1 + H_1(f)H_2(f)} N(f; \zeta)$$

Definieer $H_3(f) = \frac{1}{1 + H_1(f)H_2(f)} N(f; \zeta)$, dan geldt:

$$U(f; \zeta) = H_1(f)H_3(f)\{R(f; \zeta) - N(f; \zeta)\},$$

$$Y(f; \zeta) = H_3(f)\{H_1(f)H_2(f)R(f; \zeta) + N(f; \zeta)\}$$

Er geldt dat

$$S_{uu} = E\{U(-f; \zeta)U(f; \zeta)\}.$$

Gebruik makend van het feit dat

$$S_{rn} = E\{R(-f; \zeta)N(f; \zeta)\} = 0 \quad \forall f,$$

$$S_{nr} = E\{N(-f; \zeta)R(f; \zeta)\} = 0 \quad \forall f,$$

volgt dan:

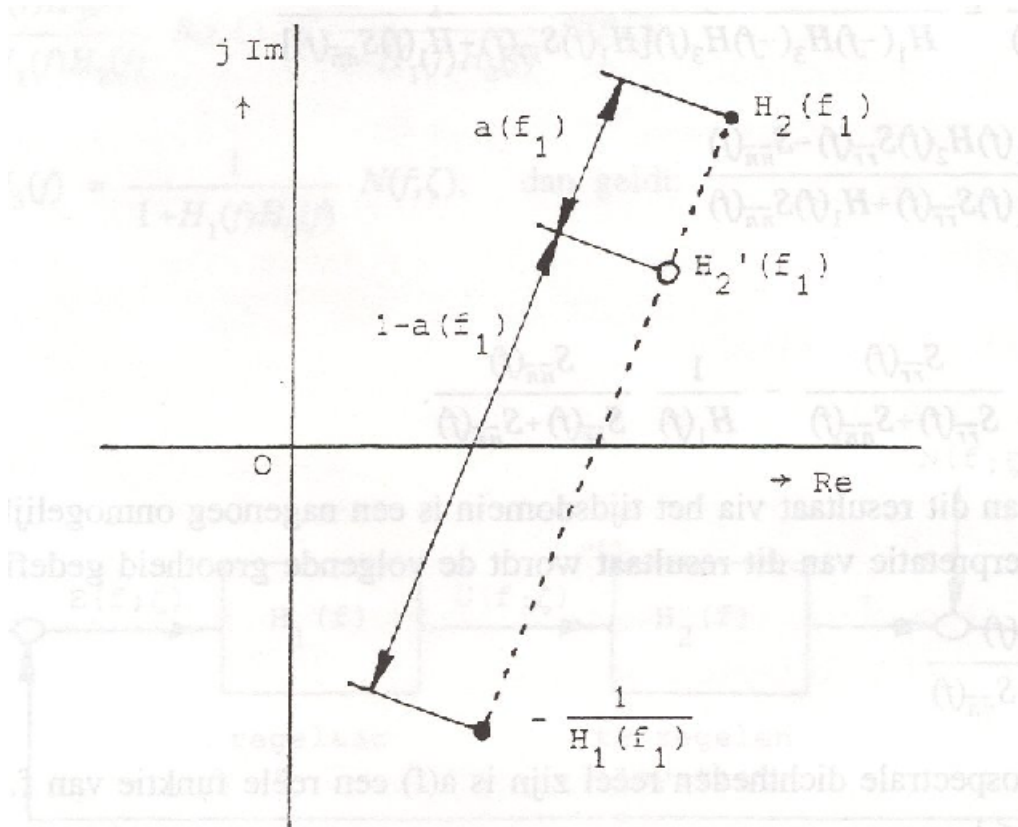
$$S_{uu}(f) = H_1(-f)H_1(f)H_3(-f)H_3(f)E\{R(-f; \zeta)R(f; \zeta) + N(-f; \zeta)N(f; \zeta)\},$$

$$S_{uu}(f) = H_1(-f)H_1(f)H_3(-f)H_3(f)\{S_{rr}(f) + S_{nn}(f)\}.$$

Op overeenkomstige wijze valt af te leiden dat

$$S_{yy}(f) = H_1(-f)H_3(-f)H_3(f)[H_1(f)H_2(f)S_{rr}(f) - S_{nn}(f)],$$

zodat:



Figuur 2.3: Het verband tussen $H'_2(f)$, $H_2(f)$ en $-1/H_1(f)$ voor een gegeven frequentie $f = f_1$.

$$H_{2'}(f) = \frac{S_{\bar{u}\bar{y}}(f)}{S_{\bar{u}\bar{u}}(f)} = \frac{H_1(-f)H_3(-f)H_3(f)[H_1(f)H_2(f)S_{\bar{r}\bar{r}}(f) - S_{\bar{n}\bar{n}}(f)]}{H_1(-f)H_3(-f)H_3(f)[H_1(f)S_{\bar{r}\bar{r}}(f) + H_1(f)S_{\bar{n}\bar{n}}(f)]}$$

$$= \frac{H_1(f)H_2(f)S_{\bar{r}\bar{r}}(f) - S_{\bar{n}\bar{n}}(f)}{H_1(f)S_{\bar{r}\bar{r}}(f) + H_1(f)S_{\bar{n}\bar{n}}(f)}$$

of

$$H_{2'}(f) = H_2(f) \frac{S_{\bar{r}\bar{r}}(f)}{S_{\bar{r}\bar{r}}(f) + S_{\bar{n}\bar{n}}(f)} - \frac{1}{H_1(f)} \frac{S_{\bar{n}\bar{n}}(f)}{S_{\bar{r}\bar{r}}(f) + S_{\bar{n}\bar{n}}(f)}$$

Het afleiden van dit resultaat via het tijdsdomein is een nagenoeg onmogelijke zaak. Voor een nadere interpretatie van dit resultaat wordt de volgende grootheid gedefinieerd:

$$a(f) = \frac{S_{\bar{n}\bar{n}}(f)}{S_{\bar{r}\bar{r}}(f) + S_{\bar{n}\bar{n}}(f)}$$

Aangezien autospectrale dichtheden reëel zijn is $a(f)$ een reële functie van f . Bovendien geldt: $0 \leq a(f) \leq 1$.

Met behulp van deze grootheid is de relatie voor $H_{2'}(f)$ te schrijven als:

$$H_{2'}(f) = H_2(f) - a(f) \left[H_2(f) + \frac{1}{H_1(f)} \right]$$

De overdrachtsfuncties $H_{2'}(f)$, $H_2(f)$ en $1/H_1(f)$ zijn complexe functies van f . Voor een bepaalde frequentie $f=f_1$ kan de relatie afgebeeld worden in het complexe vlak. Deze ziet er bijvoorbeeld uit als getekend in fig. 2.3.

De figuur illustreert de volgende eigenschappen van $H_{2'}(f)$.

- Gezien in het complexe vlak ligt $H_{2'}(f)$ op de verbindinglijn tussen $H_2(f)$ en $-1/H_1(f)$ en wel altijd tussen deze twee punten in.
- Er zijn twee extreme gevallen te onderscheiden, namelijk:
 - a) $R(f;?) = 0 \forall f$ en $N(f;?) \neq 0 \forall f$; dan wordt $a(f) = 1$ en $H_{2'}(f) = -1/H_1(f)$.
 - b) $R(f;?) \neq 0 \forall f$ en $N(f;?) = 0 \forall f$; dan wordt $a(f) = 0$ en $H_{2'}(f) = H_2(f)$.

Opgave

Gegeven de systeemconfiguratie van fig. 2.4.

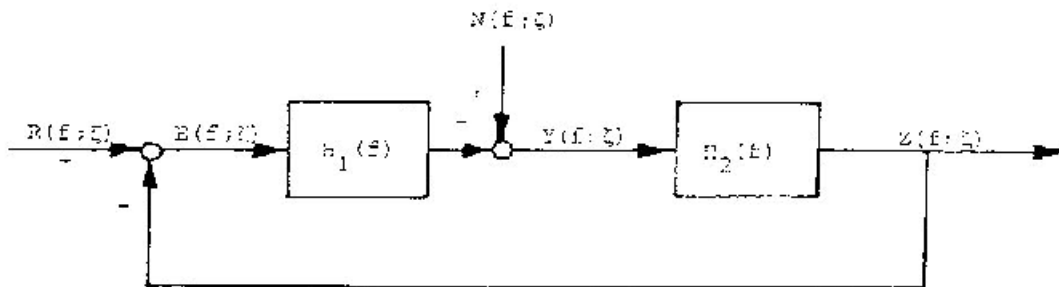
In deze configuratie wordt getracht $H_1(f)$ te bepalen uit de relatie

$$H_i(f) = \frac{S_{\bar{e}\bar{y}}(f)}{S_{\bar{e}\bar{e}}(f)}$$

Toon aan dat voor deze configuratie geldt dat:

$$H_r(f) = H_1(f) - b(f) \left[H_1(f) + \frac{1}{H_2(f)} \right],$$

met



Figuur 2.4: Een door ruis verstoord systeem in een teruggekoppelde keten.

$$b(f) = \frac{|H_2(f)|^2 S_{nn}^-(f)}{S_{rr}^-(f) + |H_2(f)|^2 S_{nn}^-(f)}$$

Terugkerend naar het geval van fig. 2.2 zullen we nu een nader onderzoek doen naar de ruis $n(t;?)$ van het te regelen systeem. In fig. 2.5a is het verband tussen $u(t;?)$, $n(t;?)$ en $y(t;?)$ uit het teruggekoppelde systeem gelicht. In fig. 2.5b is het vervangende systeem gegeven, zoals gevonden bij de beschouwde identificatieprocedure.

In geval b hebben we nu een overdrachtsfunctie $H_2'(f)$ in plaats van $H_2(f)$ en dus ook een onverstoorde systeemuitgang $X'(f;?)$, die afwijkt van de echte waarde $X(f;?)$. Omdat uiteindelijk wel weer dezelfde uitgang $Y(f;?)$ tot stand moet komen, betekent dit, dat het model in geval b ook een andere restruis heeft. We zullen nu zowel voor geval a als voor geval b de kruisspectrale dichtheid tussen het ingangssignaal van het systeem en de restruis berekenen.

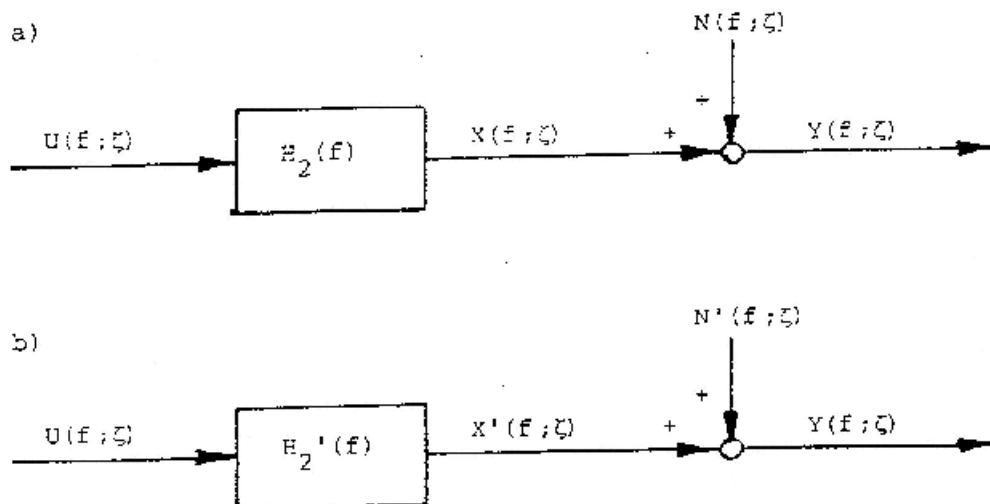
We gaan uit van de eerder gegeven relaties waarin de grootheden $U(f;?)$ en $Y(f;?)$ uitgedrukt zijn in de van buiten af binnenkomende onderling ongecorreleerde grootheden $R(f;?)$ en $N(f;?)$. Er geldt dan dat:

$$\begin{aligned} S_{un}^-(f) &= E \{ U(-f; \zeta) N(f; \zeta) \} \\ &= E \left\{ \frac{H_1(-f)}{1 + H_1(-f) H_2(-f)} [R(-f; \zeta) - N(-f; \zeta)] N(f; \zeta) \right\} \\ &= \frac{-H_1(-f)}{1 + H_1(-f) H_2(-f)} E \{ N(-f; \zeta) N(f; \zeta) \} \\ S_{un}^-(f) &= \frac{-H_1(-f)}{1 + H_1(-f) H_2(-f)} S_{nn}^-(f). \end{aligned}$$

De negatieve frequentie in de overdrachtsfunctie tussen $U(f;?)$ en $N(f;?)$ ontstaat doordat we in de niet-causale richting kijken. In de causale richting geldt:

$$S_{nu}^-(f) = S_{un}^-(-f) = \frac{-H_1(f)}{1 + H_1(f) H_2(f)} S_{nn}^-(f).$$

We kijken nu naar de spectrale dichtheid $S_{un}^-(f)$ in geval b. Deze is te berekenen uit:



Figuur 2.5: Het te identificeren systeem uit fig 2.2 (a) en het bij de gevolgde identificatie procedure gevonden vervangingschema (b).

$$N'(f; \zeta) = Y(f; \zeta) - X'(f; \zeta)$$

dus

$$S_{uu}^-(f) = S_{uy}^-(f) - S_{ux}^-(f) = S_{uy}^-(f) - H_2'(f) S_{uu}^-(f),$$

$$\text{waarbij } H_2'(f) = \frac{S_{uy}^-(f)}{S_{uu}^-(f)},$$

zodat

$$S_{uu}^-(f) = 0.$$

De overdrachtsfunctie die men vindt uit

$$H_2'(f) = \frac{S_{uy}^-(f)}{S_{uu}^-(f)}$$

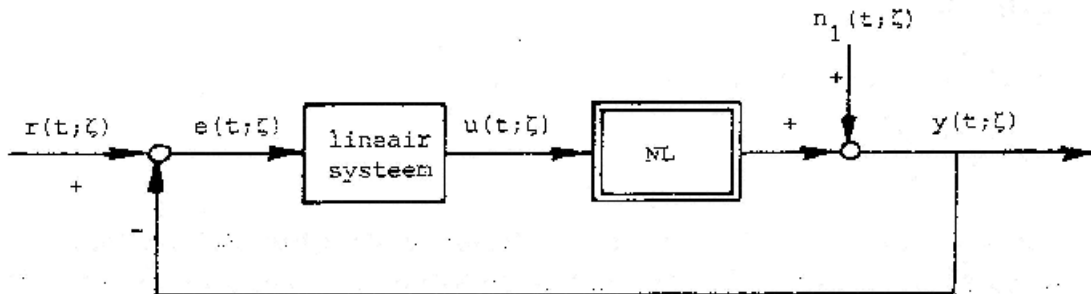
is dus altijd een zodanige oplossing dat de variantie van de restruis minimaal is, zoals werd afgeleid in paragraaf 5.3. De dan overblijvende restruis is ongecorrleerd met de ingang van het systeem. Wanneer bekend is dat de restruis inderdaad ongecorrleerd moet zijn, zoals bij een systeem in een open keten meestal het geval is, levert dit de juiste oplossing. In een tegengekoppeld systeem levert dit echter een foute oplossing, omdat dan ook het verband tussen de restruis en het ingangssignaal ten gevolge van de terugkoppelbaan meegenomen wordt in het systeem. De juiste oplossing moet een restruis opleveren die niet minimaal is. Dit probleem treedt op bij het bepalen van de beschrijvende functie van een niet-lineair systeem in een gesloten keten en zal in de volgende paragraaf nader worden beschouwd.

2.3 Het beschrijvende-functie model in de gesloten keten

We beschouwen een niet-lineair systeem, waarvan de uitgang verstoord is door ruis, in een teruggekoppelde keten volgens fig. 2.6. Verder is gegeven dat de ruis $n_1(t; \zeta)$ ongecorrleerd is met de ingang $r(t; \zeta)$. We willen het niet-lineaire systeem vervangen door een beschrijvende-functie model, bestaande uit een lineair systeem met overdrachtsfunctie $G(u; f)$ en een restruis $N_2(f; \zeta)$. Noem de overdrachtsfunctie van het lineaire systeem $H(f)$, dan ontstaat de frequentiedomeinrepresentatie van het vervangingsschema volgens fig. 2.7. Om de in de vorige paragraaf gesignaleerde problemen te omzeilen beschouwen we de relatie tussen het externe signaal $R(f; \zeta)$ en elk van de signalen $U(f; \zeta)$ en $Y(f; \zeta)$ afzonderlijk. We kunnen beide verbanden weergeven met behulp van een open keten model volgens fig. 2.8. Er geldt namelijk dat:

$$U(f; \zeta) = \frac{H(f)}{1 + H(f)G(u; f)} R(f; \zeta) + \frac{-H(f)}{1 + H(f)G(u; f)} [N_1(f; \zeta) + N_2(f; \zeta)]$$

$$Y(f; \zeta) = \frac{H(f)G(u; f)}{1 + H(f)G(u; f)} R(f; \zeta) + \frac{1}{1 + H(f)G(u; f)} [N_1(f; \zeta) + N_2(f; \zeta)].$$



Figuur 2.6: Een niet-lineair systeem met ruis op de uitgang in een teruggekoppelde keten.

We hebben nu zowel voor $U(f;?)$ als voor $Y(f;?)$ een configuratie geschapen waarbij het verband met $R(f;?)$ kan worden bepaald door minimalisering van de variantie van de restruis. De oplossing is dan zodanig dat deze restruis ongecorrleerd is met de ingang $R(f;?)$.

Deze aanpak levert de vergelijkingen

$$\frac{S_{ry}^{-}(f)}{S_{rr}^{-}(f)} = \frac{H(f)G(u; f)}{1 + H(f)G(u; f)},$$

$$\frac{S_{ru}^{-}(f)}{S_{rr}^{-}(f)} = \frac{H(f)}{1 + H(f)G(u; f)}.$$

Wanneer nu de bovenste vergelijking gedeeld wordt door de onderste levert dit:

$$\frac{S_{ry}^{-}(f)}{S_{ru}^{-}(f)} = G(u; f).$$

Dit is precies de vorm die in paragraaf 5.2.1 van het dictaat "Systemen, Signalen, Stochastiek" werd gevonden voor het identificeren van een lineair systeem in een gesloten keten.

De restruis, die bij de uitgang van het gelineariseerde niet-lineaire systeem moet worden opgeteld om het uitgangssignaal $Y(f;?)$ te leveren, is nu gelijk aan $N(f;?) = N_1(f;?) + N_2(f;?)$. Deze ruis is ongecorrleerd met de ingang $R(f;?)$ van het teruggekoppelde systeem als geheel.

2.4 Systemen met meerdere in- en uitgangen

In fig. 2.9 is de frequentiedomeinrepresentatie gegeven van een systeem met twee ingangen en twee uitgangen. De ingangen zijn stochastische processen, de uitgangen zijn elk verstoord door een ruis.

De ingangs- uitgangsrelaties voor dit systeem kunnen worden weergegeven door de volgende matrixvergelijking.

$$\begin{bmatrix} Y_1(f; \zeta) \\ Y_2(f; \zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(f) & H_{21}(f) \\ H_{12}(f) & H_{22}(f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(f; \zeta) \\ U_2(f; \zeta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1(f; \zeta) \\ N_2(f; \zeta) \end{bmatrix}$$

Definieer de matrix

$$H(f) = \begin{bmatrix} H_{11}(f) & H_{12}(f) \\ H_{21}(f) & H_{22}(f) \end{bmatrix},$$

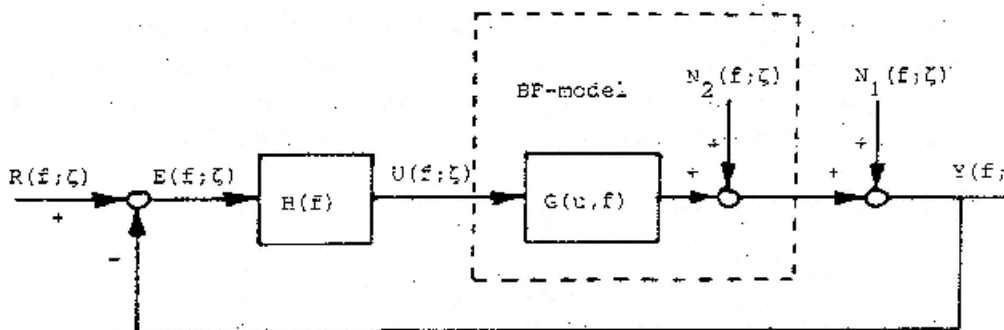
en de vectoren

$$\underline{u}(f; \zeta)^T = [U_1(f; \zeta) \ U_2(f; \zeta)],$$

$$\underline{y}(f; \zeta)^T = [Y_1(f; \zeta) \ Y_2(f; \zeta)],$$

$$\underline{n}(f; \zeta)^T = [N_1(f; \zeta) \ N_2(f; \zeta)],$$

dan is het stelsel vergelijkingen ook te schrijven als:



Figuur 2.7: Frequentiedomeinrepresentatie van het systeem uit fig 2.6, waarbij het niet-lineaire systeem vervangen is door zijn beschrijvende-functie-model.

$$\underline{y}(f; \zeta) = H(f)^T \underline{u}(f; \zeta) + \underline{n}(f; \zeta)$$

of

$$\underline{y}(f; \zeta)^T = \underline{u}(f; \zeta)^T H(f) + \underline{n}(f; \zeta)^T$$

We gaan er verder van uit, dat we beschikken over twee hulpsignalen $Z_1(f; ?)$ en $Z_2(f; ?)$ samengenomen in de vector:

$$\underline{z}(f; \zeta)^T = [Z_1(f; \zeta) \quad Z_2(f; \zeta)].$$

Voorvermenigvuldigen van de vergelijking met de vector $\underline{z}(-f; ?)$ levert nu:

$$\underline{z}(-f; \zeta) \underline{y}(f; \zeta)^T = \underline{z}(-f; \zeta) \underline{u}(f; \zeta)^T H(f) + \underline{z}(-f; \zeta) \underline{n}(f; \zeta)^T.$$

Als volgende stap nemen we de verwachtingswaarde en dit leidt tot de vergelijking

$$S_{zy}^-(f) = S_{zu}^-(f)H(f) + S_{zn}^-(f).$$

De grootheden $S_{zy}^-(f)$, $S_{zu}^-(f)$ en $S_{zn}^-(f)$ zijn drie matrices, die als volgt gedefinieerd zijn:

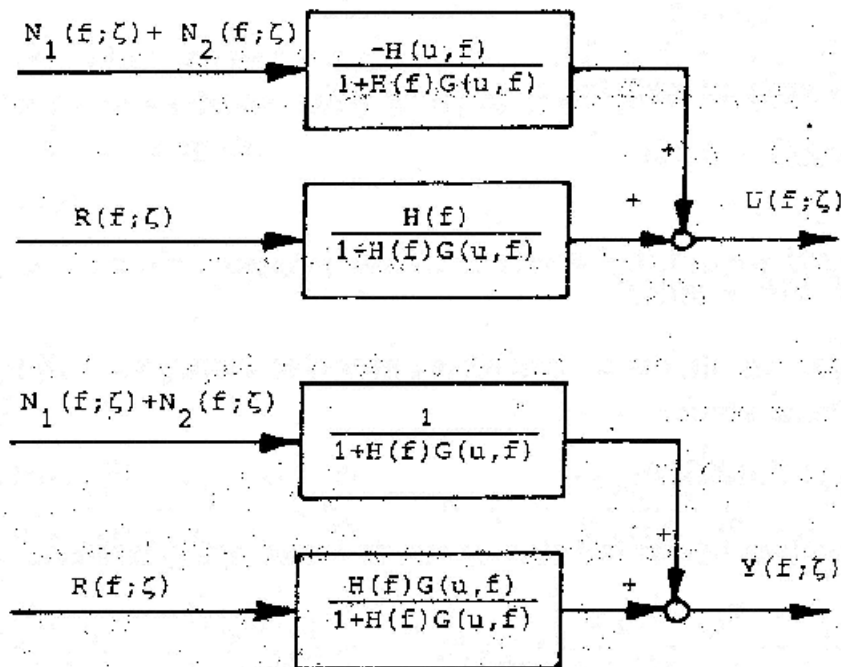
$$S_{zy}^-(f) = \begin{bmatrix} S_{z_1 y_1}^-(f) & S_{z_1 y_2}^-(f) \\ S_{z_2 y_1}^-(f) & S_{z_2 y_2}^-(f) \end{bmatrix}, \quad S_{zu}^-(f) = \begin{bmatrix} S_{z_1 u_1}^-(f) & S_{z_1 u_2}^-(f) \\ S_{z_2 u_1}^-(f) & S_{z_2 u_2}^-(f) \end{bmatrix},$$

$$S_{zn}^-(f) = \begin{bmatrix} S_{z_1 n_1}^-(f) & S_{z_1 n_2}^-(f) \\ S_{z_2 n_1}^-(f) & S_{z_2 n_2}^-(f) \end{bmatrix}.$$

We stellen nu twee eisen aan de grootheden $Z_1(t; ?)$ en $Z_2(t; ?)$, namelijk dat de matrix $S_{zn}^-(f)$ een nulmatrix is en dat de matrix $S_{zu}^-(f)$ inverteerbaar is. Als gevolg van de eerste eis reduceert de vergelijking tot:

$$S_{zy}^-(f) = S_{zu}^-(f)H(f).$$

De tweede eis levert een vergelijking waaruit de matrix $H(f)$ kan worden opgelost, namelijk



Figuur 2.8: De stochastische processen $U(f; ?)$ en $Y(f; ?)$ als uitgang van een model met twee ingangen in een open keten.

$$H(f) = S_{zu}^{-1}(f) S_{zy}(f)$$

Uitgeschreven:

$$H_{11}(f) = \frac{S_{z_2 y_1}^{-1}(f) S_{z_1 y_1}^{-1}(f) - S_{z_1 u_2}^{-1}(f) S_{z_2 y_1}^{-1}(f)}{S_{z_2 u_2}^{-1}(f) S_{z_1 u_1}^{-1}(f) - S_{z_1 u_2}^{-1}(f) S_{z_2 u_1}^{-1}(f)},$$

$$H_{12}(f) = \frac{S_{z_2 y_2}^{-1}(f) S_{z_1 y_2}^{-1}(f) - S_{z_1 u_2}^{-1}(f) S_{z_2 y_2}^{-1}(f)}{S_{z_2 u_2}^{-1}(f) S_{z_1 u_1}^{-1}(f) - S_{z_1 u_2}^{-1}(f) S_{z_2 u_1}^{-1}(f)},$$

$$H_{21}(f) = \frac{S_{z_1 y_1}^{-1}(f) S_{z_2 y_1}^{-1}(f) - S_{z_2 u_1}^{-1}(f) S_{z_1 y_1}^{-1}(f)}{S_{z_1 u_1}^{-1}(f) S_{z_2 u_2}^{-1}(f) - S_{z_2 u_1}^{-1}(f) S_{z_1 u_2}^{-1}(f)},$$

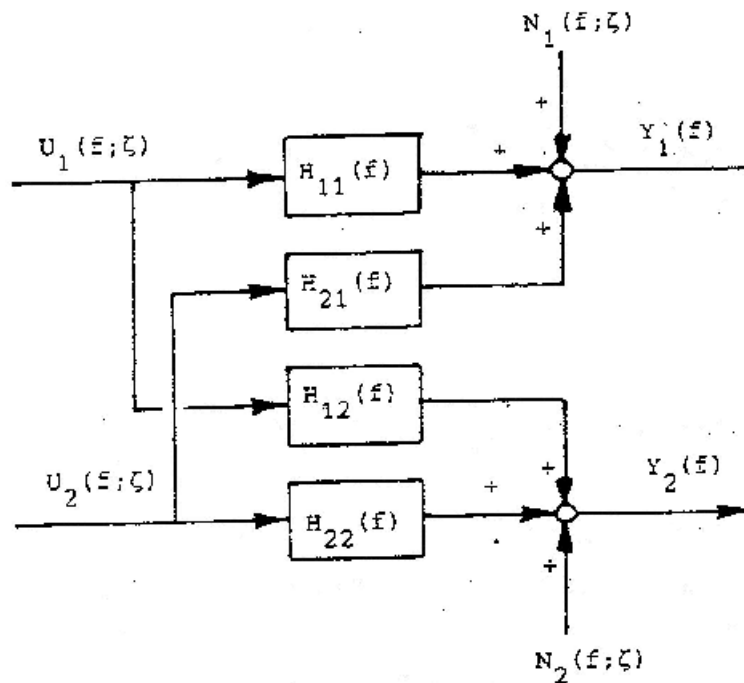
$$H_{22}(f) = \frac{S_{z_1 y_2}^{-1}(f) S_{z_2 y_2}^{-1}(f) - S_{z_2 u_1}^{-1}(f) S_{z_1 y_2}^{-1}(f)}{S_{z_1 u_1}^{-1}(f) S_{z_2 u_2}^{-1}(f) - S_{z_2 u_1}^{-1}(f) S_{z_1 u_2}^{-1}(f)},$$

Deze uitdrukkingen zijn ingewikkelder dan wanneer steeds een systeem met maar één ingang zou worden geïdentificeerd zoals in fig. 2.10. Voor de hier gegeven configuraties geldt bij gebruik van een hulpsignaal $z_1(t;?)$ voor de configuratie met ingangssignaal $u_1(t;?)$ en $z_2(t;?)$ voor de configuratie met ingangssignaal $u_2(t;?)$:

$$H_{11}(f) = \frac{S_{z_1 y_1}^{-1}(f)}{S_{z_1 u_1}^{-1}(f)}, \quad H_{12}(f) = \frac{S_{z_1 y_2}^{-1}(f)}{S_{z_1 u_1}^{-1}(f)},$$

$$H_{21}(f) = \frac{S_{z_2 y_1}^{-1}(f)}{S_{z_2 u_2}^{-1}(f)}, \quad H_{22}(f) = \frac{S_{z_2 y_2}^{-1}(f)}{S_{z_2 u_2}^{-1}(f)}.$$

De aard van het verschil met het geval van 2 ingangssignalen wordt wat duidelijker als we in het voorlaatste geval teller en noemer in de uitdrukkingen voor $H_{11}(f)$ en $H_{12}(f)$ delen door $S_{z_2 u_2}^{-1}(f)$ en in de uitdrukkingen voor



Figuur 2.9: Voorbeeld van een systeem met meerdere in- en uitgangen.

$H_{21}(f)$ en $H_{22}(f)$ delen door $S_{z_1 u_1}^{-}(f)$. De vergelijkingen gaan dan over in:

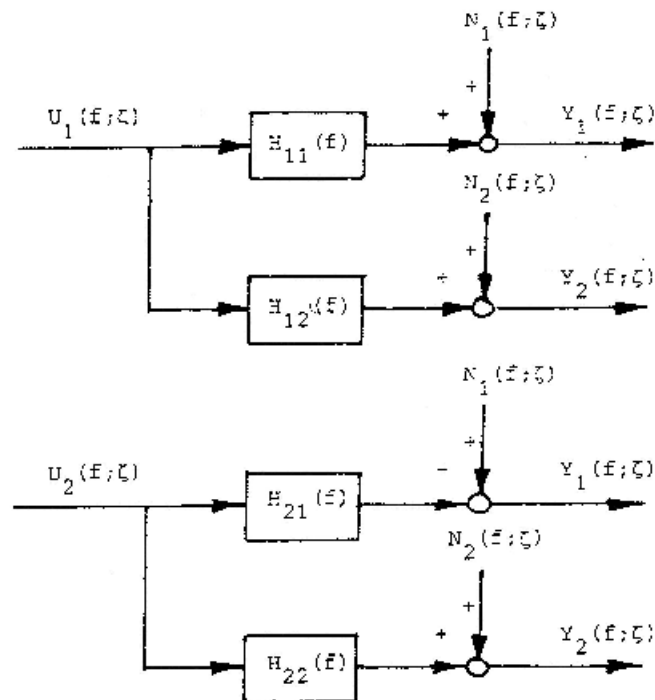
$$H_{11}(f) = \frac{S_{z_1 y_1}^{-}(f) - \frac{S_{z_1 u_2}^{-}(f)}{S_{z_2 u_2}^{-}(f)} S_{z_2 y_1}^{-}(f)}{S_{z_1 u_1}^{-}(f) - \frac{S_{z_1 u_2}^{-}(f)}{S_{z_2 u_2}^{-}(f)} S_{z_2 u_1}^{-}(f)},$$

$$H_{12}(f) = \frac{S_{z_1 y_2}^{-}(f) - \frac{S_{z_1 u_2}^{-}(f)}{S_{z_2 u_2}^{-}(f)} S_{z_2 y_2}^{-}(f)}{S_{z_1 u_1}^{-}(f) - \frac{S_{z_1 u_2}^{-}(f)}{S_{z_2 u_2}^{-}(f)} S_{z_2 u_1}^{-}(f)},$$

$$H_{21}(f) = \frac{S_{z_2 y_1}^{-}(f) - \frac{S_{z_2 u_1}^{-}(f)}{S_{z_1 u_1}^{-}(f)} S_{z_1 y_1}^{-}(f)}{S_{z_2 u_2}^{-}(f) - \frac{S_{z_2 u_1}^{-}(f)}{S_{z_1 u_1}^{-}(f)} S_{z_1 u_2}^{-}(f)},$$

$$H_{22}(f) = \frac{S_{z_2 y_2}^{-}(f) - \frac{S_{z_2 u_1}^{-}(f)}{S_{z_1 u_1}^{-}(f)} S_{z_1 y_2}^{-}(f)}{S_{z_2 u_2}^{-}(f) - \frac{S_{z_2 u_1}^{-}(f)}{S_{z_1 u_1}^{-}(f)} S_{z_1 u_2}^{-}(f)},$$

De eerste term in teller en noemer correspondeert steeds met die voor het geval met één ingang, maar er hoort steeds een correctieterm bij die een correctie aanbrengt voor correlaties tussen $z_1(t;?)$ en $u_2(t;?)$ enerzijds en tussen $z_2(t;?)$ en $u_1(t;?)$ anderzijds. Bij multivariabele systemen in een gesloten keten met uitwendige



Figuur 2.10: Twee systemen met elk maar één ineennessenaal.

testsignalen $\underline{z}(t;?)$ zullen de componenten van $\underline{z}(t;?)$ zeker gecorreleerd zijn met die van $\underline{u}(t;?)$, zodat deze correctietermen noodzakelijk zijn.

Voor het bijzondere geval van een systeem in een open keten, met ruissignalen die ongecorreleerd zijn met de ingangssignalen, geldt dat de matrix $S_{uu}^-(f) = 0$, zodat $\underline{z}(t; \zeta) = \underline{u}(t; \zeta)$ kan worden gekozen. De vergelijking voor de matrix van overdrachtsfuncties van het systeem wordt dan:

$$H(f) = S_{uu}^-(f)^{-1} S_{uy}^-(f).$$

De tweede eis voor identificeerbaarheid is nu dat $|S_{uu}(f)| \neq 0$. Om tot een interpretatie van deze eis te komen zullen we deze voor het geval van twee ingangen nader uitwerken. Dit levert:

$$\begin{aligned} |S_{uu}^-(f)| &= \begin{vmatrix} S_{u_1 u_1}^-(f) & S_{u_1 u_2}^-(f) \\ S_{u_2 u_1}^-(f) & S_{u_2 u_2}^-(f) \end{vmatrix} \neq 0 \\ &= S_{u_1 u_1}^-(f) S_{u_2 u_2}^-(f) - S_{u_1 u_2}^-(f) S_{u_2 u_1}^-(f) \\ &= S_{u_1 u_1}^-(f) S_{u_2 u_2}^-(f) - |S_{u_1 u_2}^-(f)|^2 \neq 0 \end{aligned}$$

of

$$S_{u_1 u_1}^-(f) S_{u_2 u_2}^-(f) \{ 1 - \Gamma_{u_1 u_2}^-(f)^2 \} \neq 0.$$

Dit is verder uit te splitsen in 3 noodzakelijke voorwaarden, namelijk:

$$S_{u_1 u_1}^-(f) \neq 0; \quad S_{u_2 u_2}^-(f) \neq 0; \quad \Gamma_{u_1 u_2}^-(f) \neq 1.$$

In woorden uitgedrukt: Om een systeem met 2 ingangen te identificeren bij een frequentie f , moeten beide ingangssignalen een spectrale dichtheid hebben die niet nul is bij deze frequentie en de coherentie tussen de ingangssignalen onderling mag niet gelijk aan 1 zijn. In het algemeen geldt, dat voor identificatie van een systeem met n ingangen n testsignalen moeten worden toegevoerd. Deze testsignalen moeten een onafhankelijk stelsel vergelijkingen kunnen opleveren. Dit houdt in, dat ze voor de beschouwde frequenties een spectrale dichtheid ongelijk nul moeten hebben en dat geen van deze testsignalen als een lineaire combinatie van de andere testsignalen beschreven kan worden.

2.5 Recapitulatie

In het vak Systemen, Signalen, Stochastiek is behandeld hoe systemen met stochastische ingangssignalen en, eveneens stochastische, stoorsignalen in principe geïdentificeerd kunnen worden. Wanneer men in staat is een hulpsignaal te vinden dat gecorreleerd is met de ingang van het systeem, maar ongecorreleerd met het daarop werkende stoorsignaal, dan zijn hiervoor relaties af te leiden in het tijdsdomein. Deze relaties worden gekarakteriseerd door convolutie-integralen die het verband geven tussen impulsresponsies en covariantiefuncties. Door deze relaties te transformeren naar het frequentiedomein ontstaan algebraïsche vergelijkingen die veel gemakkelijker te hanteren zijn. Deze geven het verband tussen overdrachtsfuncties en spectrale dichtheden.

Wanneer het te identificeren systeem deel uitmaakt van een groter geheel, worden de vergelijkingen in het tijdsdomein al gauw ingewikkeld en ondoorzichtig. In dit hoofdstuk is de mogelijkheid onderzocht om stochastische processen te transformeren naar het frequentiedomein. Dit blijkt mogelijk na introductie van een gemodificeerde fouriertransformatie. Hierdoor kan in het frequentiedomein de behandeling beperkt blijven tot uitsluitend algebraïsche vergelijkingen. Het nut van deze aanpak wordt geïllustreerd aan de hand van een aantal praktische problemen, te weten:

- Het afleiden van een relatie voor de fout bij toepassing in een gesloten keten van een methode die uitsluitend geldig kan zijn in een open keten.
- De identificatie van een beschrijvende functie van een niet lineair systeem in een gesloten keten.
- Identificatie van multivariabele systemen met behulp van spectrale dichtheden.

This document was created with Win2PDF available at <http://www.daneprairie.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.