TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4
2628 CD Delft

IN2505 II Berekenbaarheidstheorie
Tentamen
Maandag 2 juli 2007, 14.00-17.00 uur

BELANGRIJK

Beschikbare tijd: 3 uur.

Gebruik hulpmiddelen: Bij het tentamen mogen geen boeken, aantekeningen, of andere bronnen worden geraadpleegd. Tevens mag er geen gebruik worden gemaakt van rekenmachines.

Puntentelling: Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven. Voor elke opgave zijn 10 punten te verdienen. Alle opgaven tellen even zwaar mee.

Totaal aantal pagina's: 2.

Algemeen: Het is de bedoeling om iedere opgave te beginnen op een nieuwe zijde.

---

1. Zij $L \subseteq \Sigma^*$ een taal over een gegeven alfabet Σ. Laat de *ster-afsluiting* L^* van L gedefinieerd zijn als $L^* = \{w_1 w_2 \dots w_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ en } w_i \in L \text{ voor } 1 \leq i \leq n\}$.

   (a) Geef een definitie van het begrip *Turing-herkenbare taal* (Eng.: Turing-recognizable language). (2 punten)

   (b) Bewijs dat voor elke *Turing-herkenbare* taal $L \subseteq \Sigma^*$, de ster-afsluiting L^* ook *Turing-herkenbaar* is. (8 punten)

2. Zij V de verzameling van alle functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zodanig dat $f(x) = f(x+1) = f(x+2) = 1$ voor een of andere x (dus deze x kan voor verschillende f verschillend zijn). Met andere woorden:

$$V = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \text{er is een } x \text{ zodat } f(x) = f(x+1) = f(x+2) = 1\}.$$

   (a) Geef een definitie van het begrip *aftelbare verzameling* (Eng.: countable set). (2 punten)

   (b) Ga na of V aftelbaar is of niet (2 punten) en geef een bewijs van uw opvatting (indien de verzameling niet aftelbaar is, dient u een bewijs te geven met behulp van de diagonaalmethode). (6 punten)

3. Beschouw de klasse van Contextvrije Grammatica's (Eng.: Context-Free Grammars; CFG's) over het alfabet $\Sigma = \{a, b, c, \ldots, z\}$. Zij:

$$AAP_{\mathsf{CFG}} = \{\langle G \rangle \mid G \text{ is een } \mathsf{CFG} \text{ en } aap \in L(G)\}.$$

   (a) Ga na of AAP_{CFG} *beslisbaar* (Eng.: decidable) is of niet; (2 punten)

   (b) en bewijs uw opvatting. (8 punten)

4. Zij $\Sigma = \{0, 1\}$ gegeven. Beschouw het volgende probleem:

$$D = \{\langle M \rangle \mid M \text{ is een } \mathsf{TM} \text{ en } L(M) = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}\}$$

   Met andere woorden, D bestaat uit die (coderingen van) Turing-machines M die de taal $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ herkennen.

   Bewijs met behulp van *mapping reduction* dat D niet beslisbaar (Eng.: *undecidable*) is. Uw bewijs dient daarbij uit 2 delen te bestaan:

   (a) Een beschrijving van de *reductie(functie)* f. (5 punten)

   (b) Het bewijs dat deze f inderdaad aan de eisen van een mapping reduction voldoet. (5 punten)

5. Zij MIN_{TM} de klasse van alle beschrijvingen van *minimale* Turing-machines over een gegeven tape-alfabet Γ. Een TM wordt minimaal genoemd als er geen daarmee equivalente TM bestaat die een kortere beschrijving bezit. Met andere woorden:

$$MIN_{\mathsf{TM}} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ is een minimale TM}\}.$$

   Bewijs dat **geen enkele** *oneindige* deelverzameling van MIN_{TM} Turing-herkenbaar (Eng.: Turing-recognizable) is.

EINDE TENTAMEN

Vanmiddag zal een uitwerking van dit tentamen op Blackboard worden gepubliceerd.