TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4
2628 CD Delft

IN2505 II Berekenbaarheidstheorie
Tentamen
Maandag 2 juli 2007, 14.00-17.00 uur

BELANGRIJK

Beschikbare tijd: 3 uur.

Gebruik hulpmiddelen: Bij het tentamen mogen geen boeken, aantekeningen, of andere bronnen worden geraadpleegd. Tevens mag er geen gebruik worden gemaakt van rekenmachines.

Puntentelling: Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven. Voor elke opgave zijn 10 punten te verdienen. Alle opgaven tellen even zwaar mee.

Totaal aantal pagina's: 2.

Algemeen: Het is de bedoeling om iedere opgave te beginnen op een nieuwe zijde.

---

1. Zij $L \subseteq \Sigma^*$ een taal over een gegeven alfabet Σ. Laat de *ster-afsluiting* L^* van L gedefinieerd zijn als $L^* = \{w_1 w_2 \ldots w_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ en } w_i \in L \text{ voor } 1 \leq i \leq n\}$.

   (a) Geef een definitie van het begrip *Turing-herkenbare taal* (Eng.: Turing-recognizable language). (2 punten)

   (b) Bewijs dat voor elke *Turing-herkenbare* taal $L \subseteq \Sigma^*$, de ster-afsluiting L^* ook *Turing-herkenbaar* is. (8 punten)

   Uitwerking

   (a) Een taal L is Turing-herkenbaar d.e.s.d.a. er Turing-machine M bestaat zodanig dat $L(M) = L$, d.w.z. dat M precies alle woorden $w \in L$ accepteert.

   (b) Stel dat L een Turing-herkenbare taal is en dat M_L een acceptor is van L. Om te laten zien dat L^* Turing-herkenbaar is, construeren we een niet-deterministische TM M die L^* herkent. Het idee is dat M een invoerwoord w op niet deterministische wijze opsplitst in delen $w_1, w_2, \ldots, w_n$ voor een $n \in \mathbb{N}$ zodanig dat $w = w_1 w_2 \ldots w_n$. Vervolgens laten we M_L op $w_1, w_2, \ldots$ en w_n werken. Als M_L alle w_i ($1 \leq i \leq n$) accepteert, laten we M ook accepteren.

   In de volgende high-level beschrijving van M wordt eerst gekeken of $w = \varepsilon$, in welk geval w wordt geaccepteerd. Hierna wordt steeds een aantal (> 0) invoersymbolen gelezen en gemarkeerd als w_c ("c" staat voor *current*). Vervolgens wordt M_L gedraaid met w_c als invoer. Iedere keer wordt gecheckt of M_L het woord w_c accepteert. Dit proces wordt herhaald totdat de invoer w helemaal gelezen is.

M = "Op invoerwoord w:

1. Als het gescande symbool een spatie is, ga naar stap 6.

2. Als het gescande symbool geen spatie is:
lees het volgende symbool, en
ga naar stap 3 òf herhaal stap 2.
Als het gescande symbool een spatie is: ga naar stap 3.

3. Markeer het woord links van de lees-schrijfkop als w_c.

4. Draai M_L op w_c.

5. Als M_L accepteert, wis w_c.
Als M_L verwerpt, *verwerp*.

6. Als het gescande symbool geen spatie is, ga naar stap 2,
anders *accepteer*."

Dan geldt dat M een NDTM is die L^* herkent:

- M is zo geconstrueerd dat zij in principe 'goed' kan gokken, waarbij een goede gok een mogelijk juiste opsplitsing van w in $w_1, w_2, \ldots, w_n$ oplevert.
- M kan alleen maar accepteren, als alle w_i $(1 \leq i \leq n)$ worden geaccepteerd door M_L.
- Als er een w_i niet door M_L wordt geaccepteerd, zal M in stap 5 ofwel verwerpen of in een niet terminerend proces terecht komen.

2. Zij V de verzameling van alle functies $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ zodanig dat $f(x) = f(x+1) = f(x+2) = 1$ voor een of andere x (dus deze x kan voor verschillende f verschillend zijn). Met andere woorden:

$$V = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \text{er is een } x \text{ zodat } f(x) = f(x+1) = f(x+2) = 1\}.$$

(a) Geef een definitie van het begrip *aftelbare verzameling* (Eng.: countable set). (2 punten)

(b) Ga na of V aftelbaar is of niet (2 punten) en geef een bewijs van uw opvatting (indien de verzameling niet aftelbaar is, dient u een bewijs te geven met behulp van de diagonaalmethode). (6 punten)

Uitwerking

(a) Een verzameling V is aftelbaar als V eindig is, of als er een bijectie (correspondentie) bestaat tussen V en $\mathbb{N}$.

(b) V is uiteraard niet aftelbaar.
Bewijs:
Stel dat V aftelbaar is en dat $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ een aftelling van V is. Voor elk van deze functies moet een $x \in \mathbb{N}$ bestaan waarvoor $f(x) = f(x+1) = f(x+2) = 1$. Dit betekent dat een diagonaalfunctie van de vorm $g(x) = f_x(x) + 1$ niet werkt, omdat dan niet is gegarandeerd dat er een x is met $g(x) = g(x+1) = g(x+2) = 1$.

Om deze reden 'schuiven' we de diagonaal drie plaatsen op naar rechts. De diagonaalfunctie g wordt dan als volgt:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \leq 2 \\ f_{x-3}(x) + 1 & \text{anders} \end{cases}$$

Dan geldt enerzijds dat $g \in V$; immers $g(0) = g(1) = g(2) = 1$, zodat $g(x) = g(x+1) = g(x+2) = 1$ voor $x = 0$.
Anderzijds geldt door de diagonaalconstructie dat $g \neq f_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, zodat $g \notin V$.
Uit deze tegenspraak volgt dat V niet aftelbaar is.

3. Beschouw de klasse van Contextvrije Grammatica's (Eng.: Context-Free Grammars; CFG's) over het alfabet $\Sigma = \{a, b, c, \ldots, z\}$. Zij:

$$AAP_{\mathsf{CFG}} = \{\langle G \rangle \mid G \text{ is een } \mathsf{CFG} \text{ en } aap \in L(G)\}.$$

   (a) Ga na of AAP_{CFG} *beslisbaar* (Eng.: decidable) is of niet; (2 punten)
   (b) en bewijs uw opvatting. (8 punten)

Uitwerking

   (a) De verzameling AAP_{CFG} is beslisbaar.
   (b) *Bewijs*
   De volgende Turing-machine M is een beslisser van AAP_{CFG}:

   M = **"**Op invoer $\langle G \rangle$:
   1. Zet G om in een daarmee equivalente CFG G' in Chomsky Normaalvorm.
   2. Test of $aap \in L(G')$.
   3. *Accepteer* als $aap \in L(G')$, anders *verwerp*.**"**

   De test in stap 2 is mogelijk omdat iedere afleiding van *aap* precies 5 stappen kost ($2n - 1$ stappen voor een woord met lengte n). Omdat G' een eindig aantal productieregels bezit, kunnen alle afleidingen met lengte 5 in eindige tijd worden geprobeerd.

4. Zij $\Sigma = \{0, 1\}$ gegeven. Beschouw het volgende probleem:

$$D = \{\langle M \rangle \mid M \text{ is een } \mathsf{TM} \text{ en } L(M) = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}\}$$

Met andere woorden, D bestaat uit die (coderingen van) Turing-machines M die de taal $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ herkennen.

Bewijs met behulp van *mapping reduction* dat D niet beslisbaar (Eng.: *undecidable*) is. Uw bewijs dient daarbij uit 2 delen te bestaan:

   (a) Een beschrijving van de *reductie(functie)* f. (5 punten)
   (b) Het bewijs dat deze f inderdaad aan de eisen van een mapping reduction voldoet. (5 punten)

Uitwerking

(a) We voeren de volgende reductie uit: $HALT_{\mathsf{TM}} \leq_m D$.
Zij M_1 een Turing-machine zodanig dat $L(M_1) = \{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, bijvoorbeeld:

M_1 = "Op invoerwoord x:
  1. *Accepteer* als x bestaat uit een reeks 0-en gevolgd door een reeks van evenveel 1-en, anders *verwerp*."

Dan geldt $\langle M_1 \rangle \in D$.
Zij $\langle M, w \rangle \in HALT_{\mathsf{TM}}$. Definieer de volgende TM M' als volgt:

M' = "Op invoerwoord x:
  1. Draai M op w.
  2. Draai M_1 op x.
  3. *Accepteer* als M_1 accepteert, *verwerp* als M_1 verwerpt."

Definieer de reductie f van $HALT_{\mathsf{TM}}$ naar D als volgt: $f(\langle M, w \rangle) = \langle M' \rangle$.

(b) De hierboven gedefinieerde f is inderdaad een reductie. Allereerst is f berekenbaar. De volgende TM F berekent f:

F = "Op invoerwoord $\langle M, w \rangle$:
  1. Construeer M' m.b.v. $\langle M, w \rangle$.
  2. Print $\langle M' \rangle$ op tape en stop."

Verder geldt:
Als $\langle M, w \rangle \in HALT_{\mathsf{TM}}$ dan stopt M op w. Hierdoor zal M' aan stap 2 toekomen en zich verder gedragen als M_1 zodat $L(M') = L(M_1) = \{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Maar dit impliceert dat $\langle M' \rangle \in D$.
Als $\langle M, w \rangle \notin HALT_{\mathsf{TM}}$, dan stopt M niet op invoer w en zal M' niet aan stap 2 toekomen. Er geldt dan $L(M') = \emptyset$, zodat $\langle M' \rangle \notin D$.
Hiermee is aangetoond:

$$\langle M, w \rangle \in HALT_{\mathsf{TM}} \quad \Leftrightarrow \quad f(\langle M, w \rangle) = \langle M' \rangle \in D.$$

Uit bovenstaande volgt dat f een reductie is.

5. Zij MIN_{TM} de klasse van alle beschrijvingen van *minimale* Turing-machines over een gegeven tape-alfabet Γ. Een TM wordt minimaal genoemd als er geen daarmee equivalente TM bestaat die een kortere beschrijving bezit. Met andere woorden:

$$MIN_{\mathsf{TM}} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ is een minimale TM}\}.$$

Bewijs dat **geen enkele** *oneindige* deelverzameling van MIN_{TM} Turing-herkenbaar (Eng.: Turing-recognizable) is.

Uitwerking
Het bewijs is identiek aan dat van Th. 6.7 uit Sipser en is uit het ongerijmde. Stel dat er een oneindige deelverzameling $V \subseteq MIN_{\mathsf{TM}}$ bestaat die Turing-herkenbaar is.
Hieruit volgt dat er een opsommer M_V van V bestaat. Definieer nu de volgende TM F:

F = "Op invoer w:

1. Verwerf, m.b.v. recursiestelling, eigen beschrijving $\langle F \rangle$.

2. Draai M_V totdat er een beschrijving $\langle G \rangle$ van een TM G wordt geproduceerd die langer is dan $\langle F \rangle$.

3. Simuleer G op invoer w."

Dit leidt als volgt tot een tegenspraak:
F is een TM die equivalent is met G. Omdat M_V een opsommer is van V en V een deelverzameling van MIN_{TM} is, bevat V alleen minimale TM's. Dit betekent dat G minimaal is. Wegens de constructie van F geldt echter dat F een kortere code bezit dan G. Dit betekent dat G *niet* minimaal kan zijn. Tegenspraak.
NB: Omdat V oneindig veel elementen bevat, zal stap 2 altijd eindigen. Dit is tevens de reden dat het bewijs van Th. 6.7 ook voor dit geval werkt.

EINDE TENTAMEN