TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Tentamen IN2505-II
Berekenbaarheidstheorie

16 juni 2008, 14.00–17.00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 5 open vragen.
- Totaal aantal pagina's (exclusief dit titelblad): 1.
- Het maximaal aantal te behalen punten: 50.
- Alle vragen tellen even zwaar mee en leveren ieder maximaal 10 punten op.
- Het eindcijfer c wordt bepaald volgens de formule $c = \frac{9}{50} \cdot (\text{aantal punten}) + 1$.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of andere bronnen is tijdens dit tentamen niet toegestaan.
- Eveneens is het gebruik van grafische of niet-grafische rekenmachines niet toegestaan.
- Uiteraard komen in één tentamen niet alle onderwerpen aan bod. Trek daarom op basis van dit tentamen geen conclusies over stof die nooit getoetst wordt.
- Formuleer uw antwoord in correct Nederlands of Engels en schrijf leesbaar (gebruik eerst kladpapier).
- Geef geen irrelevante informatie. Dit kan leiden tot puntenaftrek.
- Voordat u uw antwoorden inlevert, controleer of op ieder blaadje uw naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.

1. (a) (1 punt) Geef een definitie van het *Acceptatieprobleem* (Eng. Acceptance problem) A_{TM}.
   (b) (2 punten) Geef een definitie van het begrip *accepterende berekeningsgeschiedenis* (Eng. accepting computation history) van een Turingmachine M op een invoer w.
   (c) (7 punten) Beschouw de volgende niet-deterministische Turingmachine met één hulptape:

   B = "Op invoer $\langle M, w\rangle$:
   1. Gok een woord G op de hulptape.
   2. Test met behulp van M en w of G een accepterende berekeningsgeschiedenis is van M op w.
   3. Zo ja, *accepteer*; zo neen, *verwerp*."

   Ga na of B een *beslisser* (Eng. decider) is van het Acceptatieprobleem en beargumenteer uw opvatting aan de hand van de werking van B.

2. (a) (3 punten) Geef een definitie van het begrip *bijectie* (Eng. correspondence).
   (b) (7 punten) Beschouw de verzameling V van functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ waarvoor er een, van f afhankelijke, $N_f \in \mathbb{N}$ bestaat zodat voor alle $x \in \mathbb{N}$ geldt $f(x) \leq N_f$. Met andere woorden:

   $$V = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \text{er is een } N_f \in \mathbb{N} \text{ zodat } f(x) \leq N_f \text{ voor alle } x \in \mathbb{N}\}.$$

   Ga na of V *aftelbaar* (Eng. countable) is of niet en geef een bewijs van uw opvatting.

3. (10 punten) Bewijs dat het *acceptatieprobleem voor contextvrije talen* (Eng. acceptance problem for context-free languages) A_{CFG} *beslisbaar* (Eng. decidable) is. Hierbij is gegeven dat:

   $$A_{\mathsf{CFG}} = \{\langle G, w\rangle \mid G \text{ is een CFG die } w \text{ voortbrengt}\}.$$

4. Beschouw het volgende probleem:

   $$D = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ is een TM die het woord } w \textbf{ verwerpt}\}.$$

   Let op: Een Turingmachine M *verwerpt* (Eng. rejects) een woord w als de berekening van M op w in de toestand q_{reject} eindigt!

   Bewijs met behulp van *mapping reduction* dat D niet beslisbaar (Eng.: *undecidable*) is. Uw bewijs dient daarbij uit 2 delen te bestaan:

   (a) (5 punten) Een beschrijving van de *reductie(functie)* f.
   (b) (5 punten) Het bewijs dat deze f inderdaad aan de eisen van een mapping reduction voldoet.

5. (a) (2 punten) Geef een omschrijving van het begrip *opsommer* (Eng. enumerator) van een taal L.
   (b) (2 punten) Zij $\Sigma = \{a, b\}$ een alfabet. Geef een "high-level description" van een opsommer van de taal $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\} = \{ab, aabb, aaabbb, \ldots\}$.
   (c) (6 punten) Bewijs met behulp van de *recursiestelling* (Eng. recursion theorem) dat het volgende probleem E **niet** *Turing-herkenbaar* (Eng. Turing-recognizable) is:

   $$E = \{\langle M\rangle \mid M \text{ is een } \textit{opsommer} \text{ die } L(M) \text{ in alfabetische volgorde opsomt}\}.$$

   Opmerking: Er mag gebruik worden gemaakt van het feit dat de lege taal $\emptyset$ per definitie in alfabetische volgorde wordt opgesomd.

Einde tentamenopgaven