TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Tentamen IN2505-II
Berekenbaarheidstheorie

16 juni 2008, 14.00–17.00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 5 open vragen.
- Totaal aantal pagina's (exclusief dit titelblad): 4.
- Het maximaal aantal te behalen punten: 50.
- Alle vragen tellen even zwaar mee en leveren ieder maximaal 10 punten op.
- Het eindcijfer c wordt bepaald volgens de formule $c = \frac{9}{50} \cdot (\text{aantal punten}) + 1$.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of andere bronnen is tijdens dit tentamen niet toegestaan.
- Eveneens is het gebruik van grafische of niet-grafische rekenmachines niet toegestaan.
- Uiteraard komen in één tentamen niet alle onderwerpen aan bod. Trek daarom op basis van dit tentamen geen conclusies over stof die nooit getoetst wordt.
- Formuleer uw antwoord in correct Nederlands of Engels en schrijf leesbaar (gebruik eerst kladpapier).
- Geef geen irrelevante informatie. Dit kan leiden tot puntenaftrek.
- Voordat u uw antwoorden inlevert, controleer of op ieder blaadje uw naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.

1. (a) (1 punt) Geef een definitie van het *Acceptatieprobleem* (Eng. Acceptance problem) A_{TM}.

Antwoord: Het *Acceptatieprobleem* is het volgende probleem:

$$A_{\mathsf{TM}} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ is een TM die invoer } w \text{ accepteert}\}.$$

(b) (2 punten) Geef een definitie van het begrip *accepterende berekeningsgeschiedenis* (Eng. accepting computation history) van een Turingmachine M op een invoer w.

Antwoord: Een *accepterende berekeningsgeschiedenis* van M op w is een reeks configuraties $C_0, C_1, \ldots, C_n$ zodanig dat:

i. C_0 is de startconfiguratie van M m.b.t. w;

ii. C_i levert C_{i+1} op voor $0 \leq i < n$; en

iii. C_n is een accepterende configuratie van M.

(c) (7 punten) Beschouw de volgende niet-deterministische Turingmachine met één hulptape:

B = **"**Op invoer $\langle M, w\rangle$:

1. Gok een woord G op de hulptape.

2. Test met behulp van M en w of G een accepterende berekeningsgeschiedenis is van M op w.

3. Zo ja, *accepteer*; zo neen, *verwerp*.**"**

Ga na of B een *beslisser* (Eng. decider) is van het Acceptatieprobleem en beargumenteer uw opvatting aan de hand van de werking van B.

Antwoord: Omdat het Acceptatieprobleem niet beslisbaar is, kan B geen beslisser zijn van A_{TM}. Stap 1. van Turingmachine B behoeft niet te termineren omdat er geen bovengrens is te geven aan de lengte van de string die moet worden gegokt. Stap 2. eindigt altijd want het is beslisbaar of een woord een accepterende berekeningsgeschiedenis is.

2. (a) (3 punten) Geef een definitie van het begrip *bijectie* (Eng. correspondence).

Antwoord: Een *bijectie* is een functie die zowel surjectief als injectief is.
Een functie $f : A \to B$ is *surjectief* als er voor iedere $b \in B$ een $a \in A$ bestaat met $f(a) = b$.
Een functie $f : A \to B$ is *injectief* als voor alle $a_1, a_2 \in A$ met $a_1 \neq a_2$ geldt dat $f(a_1) \neq f(a_2)$.

(b) (7 punten) Beschouw de verzameling V van functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ waarvoor er een, van f afhankelijke, $N_f \in \mathbb{N}$ bestaat zodat voor alle $x \in \mathbb{N}$ geldt $f(x) \leq N_f$. Met andere woorden:

$$V = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \text{er is een } N_f \in \mathbb{N} \text{ zodat } f(x) \leq N_f \text{ voor alle } x \in \mathbb{N}\}.$$

Ga na of V *aftelbaar* (Eng. countable) is of niet en geef een bewijs van uw opvatting.

Antwoord: V is niet aftelbaar.
Bewijs: Stel V is wel aftelbaar. Dan bestaat er een aftelling $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ van V. Definieer $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ als volgt:

$$g(n) = \begin{cases} 0 & \text{als } f_n(n) \neq 0, \\ 1 & \text{anders.} \end{cases}$$

Nu geldt:

- $g(n) \leq 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ (m.a.w. $N_g = 1$), zodat $g \in V$;
- door haar constructie kan g niet in de aftelling $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ van V voorkomen.

Tegenspraak. Conclusie: V is niet aftelbaar.

3. (10 punten) Bewijs dat het *acceptatieprobleem voor contextvrije talen* (Eng. acceptance problem for context-free languages) A_{CFG} *beslisbaar* (Eng. decidable) is. Hierbij is gegeven dat:

$$A_{\mathsf{CFG}} = \{\langle G, w\rangle \mid G \text{ is een CFG die } w \text{ voortbrengt}\}.$$

Antwoord: Zie Theorem 4.7 en haar bewijs op pp. 172-173 van Sipser (second edition).

4. Beschouw het volgende probleem:

$$D = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ is een TM die het woord } w \textbf{ verwerpt}\}.$$

Let op: Een Turingmachine M *verwerpt* (Eng. rejects) een woord w als de berekening van M op w in de toestand q_{reject} eindigt!

Bewijs met behulp van *mapping reduction* dat D niet beslisbaar (Eng.: *undecidable*) is. Uw bewijs dient daarbij uit 2 delen te bestaan:

(a) (5 punten) Een beschrijving van de *reductie(functie)* f.

Antwoord: We voeren de reductie $HALT_{\mathsf{TM}} \leq_m D$ uit. Definieer de volgende Turingmachine N voor een gegeven Turingmachine M met invoer w:

N = "Op invoer x:
1. Simuleer M op w.
2. Als $x = w$, dan **verwerp**."

De *reductie* f wordt dan gedefinieerd als $f(\langle M, w\rangle) = \langle N, w\rangle$.

(b) (5 punten) Het bewijs dat deze f inderdaad aan de eisen van een mapping reduction voldoet.

Antwoord: We moeten twee dingen aantonen:

- f is een berekenbare functie. De volgende Turingmachine F berekent f:

  F = **"**Op invoer $\langle M, w\rangle$:
  1. Construeer N m.b.v. M en w.
  2. **Print** $\langle N, w\rangle$ en **stop**.**"**

- f is een reductie voor $HALT_{\mathsf{TM}} \leq_m D$, immers:
  - Als $\langle M, w\rangle \in HALT_{\mathsf{TM}}$, dan zal M op invoer w stoppen. Dit betekent dat N op invoer w aan stap 2. toekomt. In dat geval zal N stoppen in de toestand q_{reject} aangezien de meegegeven invoer gelijk is aan w. Hieruit volgt dat $f(\langle M, w\rangle) = \langle N, w\rangle \in D$.
  - Als $\langle M, w\rangle \notin HALT_{\mathsf{TM}}$, dan zal M niet op invoer w stoppen. Nu komt N niet aan stap 2. toe, zodat N niet op de invoer w in de toestand q_{reject} zal stoppen. Hieruit volgt dat $f(\langle M, w\rangle) = \langle N, w\rangle \notin D$.

5. (a) (2 punten) Geef een omschrijving van het begrip *opsommer* (Eng. enumerator) van een taal L.

Antwoord: Een *opsommer* van L is een Turingmachine die, indien gestart op een lege tape, de woorden uit L achtereenvolgens op de uitvoertape print (zie Sipser, pag. 154 e.v.).

(b) (2 punten) Zij $\Sigma = \{a, b\}$ een alfabet. Geef een "high-level description" van een opsommer van de taal $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\} = \{ab, aabb, aaabbb, \ldots\}$.

Antwoord: De volgende Turingmachine O is een opsommer van L:

O = **"**Op de lege invoertape:
1. Herhaal voor $n = 1, 2, 3 \ldots$
2. **print** $a^n b^n$.**"**

(c) (6 punten) Bewijs met behulp van de *recursiestelling* (Eng. recursion theorem) dat het volgende probleem E **niet** *Turing-herkenbaar* (Eng. Turing-recognizable) is:

$$E = \{\langle M\rangle \mid M \text{ is een } \textit{opsommer} \text{ die } L(M) \text{ in alfabetische volgorde opsomt}\}.$$

Opmerking: Er mag gebruik worden gemaakt van het feit dat de lege taal $\emptyset$ per definitie in alfabetische volgorde wordt opgesomd.

Antwoord: Stel dat R een Turingmachine is die E herkent. Construeer de volgende opsommer:

M = **"**Op de lege invoertape:
1. Verkrijg m.b.v. de recusiestelling de eigen code $\langle M\rangle$.
2. Simuleer R op $\langle M\rangle$.
3. Als R accepteert, dan **print** "noot" gevolgd door "aap", en **stop**.
4. Als R verwerpt, dan **stop**.**"**

Er zijn nu twee mogelijkheden die beide tot tegenspraak leiden:

- Als $\langle M \rangle \in E$, dan zal R de invoer $\langle M \rangle$ accepteren tijdens de berekening van stap 2. van M. Vervolgens zal M in stap 3. de woorden "noot" en "aap" afdrukken, in niet-alfabetische volgorde dus, en stoppen. Dit is in tegenspraak met de aanname dat $\langle M \rangle \in E$.
- Als $\langle M \rangle \notin E$, dan zal R de invoer $\langle M \rangle$ verwerpen of R zal in een loop geraken tijdens de berekening van stap 2. van M. In beide gevallen geldt dat $L(M) = \emptyset$, zodat $\langle M \rangle \in E$. Wederom tegenspraak.

Conclusie: een herkenner R van E kan niet bestaan, zodat E niet Turing-herkenbaar is.

Einde tentamenopgaven