TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Tentamen IN2505-II Berekenbaarheidstheorie

15 juni 2009, 14.00–17.00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 5 open vragen.
- Totaal aantal pagina's (exclusief dit titelblad): 1.
- Het maximaal aantal te behalen punten: 50.
- Alle vragen tellen even zwaar mee en leveren ieder maximaal 10 punten op.
- Het eindcijfer wordt bepaald door afronding van $\frac{9}{50} \cdot (\text{aantal punten}) + 1$ tot een geheel getal.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of andere bronnen is tijdens dit tentamen niet toegestaan.
- Eveneens is het gebruik van grafische of niet-grafische rekenmachines niet toegestaan.
- Uiteraard komen in één tentamen niet alle onderwerpen aan bod. Trek daarom op basis van dit tentamen geen conclusies over stof die nooit getoetst wordt.
- Formuleer uw antwoord in correct Nederlands of Engels en schrijf leesbaar (gebruik eerst kladpapier).
- Geef geen irrelevante informatie. Dit kan leiden tot puntenaftrek.
- Voordat u uw antwoorden inlevert, controleer of op ieder blaadje uw naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.

1. (a) (2 punten) Zij M een *niet-deterministische* Turingmachine die een taal L *beslist* en zij w een invoerwoord voor M. Beschouw de volgende uitspraak:

   Als $w \notin L$, dan kan er een oneindig lang pad in de berekeningsboom *van M op w bestaan.*

   Ga na of deze uitspraak juist of onjuist is, en beargumenteer uw antwoord.

   (b) Beschouw de volgende taal over het alfabet $\{a\}$:

   $$L = \{a^n \mid n \text{ is een priemgetal}\}.$$

   M.a.w. L bestaat uit alle reeksen van a-tjes waarvan de lengte een priemgetal is. Bijvoorbeeld, $aaaaa \in L$ $(n = 5)$ en $aaaa \notin L$ $(n = 4)$.

   Beschouw de volgende *high-level description* van een Turingmachine M:

   M = "Op invoerwoord w:

   1. Gok een woord $v = a^n$ met $1 < n < |w|$.

   2. Check of v een geheel aantal keren is af te passen op w.

   3. Zo ja, *verwerp*; zo neen, *accepteer*."

   i. (2 punten) Geef een *implementation description* van stap **1.** van M.

   ii. (6 punten) Is M een niet-deterministische *beslisser* (Eng.: decider) van L? Licht uw antwoord toe.

2. (a) (3 punten) Geef een definitie van het begrip *surjectieve functie* (Eng.: a function that is onto).

   (b) (7 punten) Beschouw de verzameling V van alle deelverzamelingen $W \subseteq \mathbb{N}$ zodanig dat $0 \in W$. Met andere woorden:

   $$V = \{W \subseteq \mathbb{N} \mid 0 \in W\}.$$

   Ga na of V *aftelbaar* (Eng.: countable) is of niet, en geef een bewijs van uw opvatting.

3. (a) (4 punten) Beschouw de volgende uitspraak:

   Als A en B beide niet Turing-herkenbare talen zijn, dan geldt $A \leq_m B$.

   Ga na of deze uitspraak waar of onwaar is, en geef een *bewijs* van uw opvatting.

   (b) (6 punten) *Bewijs* dat voor ieder paar Turing-herkenbare talen L_1 en L_2 geldt dat $L_1 \cup L_2$ ook Turing-herkenbaar is.

4. Beschouw het volgende probleem:

   $$D = \{\langle M, w_1, w_2\rangle \mid w_1 \neq w_2 \text{ en } M \text{ is een TM zodanig dat } L(M) = \{w_1, w_2\}\}.$$

   Bewijs met behulp van *mapping reduction* dat D *niet beslisbaar* (Eng.: undecidable) is. Uw bewijs dient daarbij uit 2 delen te bestaan:

   (a) (5 punten) Een beschrijving van de *reductie(functie)* f.

   (b) (5 punten) Het bewijs dat deze f inderdaad aan de eisen van een mapping reduction voldoet.

5. (10 punten) Beschouw het volgende probleem:

   $$E = \{\langle M\rangle \mid M \text{ is een TM zodanig dat er woorden } w_1 \text{ en } w_2 \text{ met } w_1 \neq w_2 \text{ bestaan zodanig dat } M \text{ op zowel } w_1 \text{ als } w_2 \text{ termineert}\}.$$

   Bewijs met behulp van de *recursiestelling* (Eng.: recursion theorem) dat E niet beslisbaar is.

Einde tentamenopgaven