IN2505-II Berekenbaarheidstheorie

College 2

Hans Tonino

Algoritmiekgroep
Faculteit EWI – TU Delft

13 april 2009

Vorig college

Welke problemen zijn (niet) algoritmisch oplosbaar?

- Wat is een probleem?
- Wat is een algoritme?

Turingmachines

- Finite state control
- Transitiefunctie
- Configuratie (accepterend, verwerpend)

Turingmachine en Taal

- Acceptatie van een woord
- Taal $L(M)$ van een TM M
- Turing-herkenbaar, Turing-beslisbaar
- Herkenner, beslisser

Beschrijvingen van TM's

- Formele beschrijving
- Implementatiebeschrijving
- High-level beschrijving

Aanbevolen opgaven

Sipser p. 161 e.v.: 3.1, 3.2, 3.5, 3.8.

Varianten van TM's

- Multi-tape TM's: TM's met meerdere tapes
- Niet-deterministische TM's (NDTM's)
- andere varianten: zie opgaven.

Multi-tape TM's

Een TM kan meer dan één tape bezitten; men spreekt dan van een multi-tape TM.

De transitiefunctie heeft dan signatuur
$\delta : Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R\}^k$.

$$\delta(q_i, a_1, a_2, \ldots, a_k) = (q_j, b_1, b_2, \ldots, b_k, L, R, \ldots, L).$$

heeft dan betrekking op k simultane akties die op de k-tapes worden uitgevoerd, gaande van toestand q_i naar q_j.

(Sipser p. 150)

Opgave

Geef een implementatiebeschrijving van een TM die de volgende taal P over alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ beslist:

$$P = \{w \in \Sigma^* \mid w = w^R\}.$$

Hoe zou je dat doen met een ééntape TM?

Equivalentie TM's

Twee TM's M_1 en M_2 zijn equivalent als deze dezelfde taal herkennen, d.w.z. als $L(M_1) = L(M_2)$.

Opgave

Zij gegeven dat de TM's M_1 en M_2 equivalent zijn. Volgt hieruit dat M_1 en M_2 dezelfde taal beslissen?

Equivalentie 1-TM's en k-Tm's (Th. 3.13)

Een k-tape TM kan worden gesimuleerd door een standaard één-tape TM (in ten hoogste kwadratische tijd ten opzichte van de gesimuleerde TM).

k-TM's en herkenbaarheid (Cor. 3.15)

Een taal L is Turing-herkenbaar d.e.s.d.a. er een k-TM M bestaat zodanig dat $L(M) = L$.

Evenzo: Een taal L is Turing-beslisbaar d.e.s.d.a. er een k-TM M bestaat zodanig dat $L(M) = L$ en zodanig dat M voor iedere invoer in een stopconfiguratie terecht komt.

Machtsverzameling $\mathscr{P}(V)$

$\mathscr{P}$ stelt de machtsverzameling-operator voor.

Als V een verzameling is, dan is:

$$\mathscr{P}(V) = \{X \mid X \subseteq V\},$$

m.a.w. $\mathscr{P}(V)$ is de verzameling bestaande uit alle deelverzamelingen van V.

Niet-deterministische TM's

Een niet-deterministische TM is op dezelfde wijze gedefinieerd als een "normale" TM behalve dat de transitiefunctie verschilt:

$$\delta : Q \times \Gamma \to \mathscr{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R\}).$$

Voorbeeld

Als

$$\delta(q_1, a) = \{(q_3, b, R), (q_4, c, L), (q_3, a, L)\},$$

dan kan de betreffende TM (die zich in toestand q_1 bevindt en een a leest) 3 mogelijke akties doen:

1. overgaan naar toestand q_3, a veranderen in b en de kop naar rechts verplaatsen, of
2. overgaan naar toestand q_4, a veranderen in c en de kop naar links verplaatsen, of
3. overgaan naar toestand q_3, de a laten staan en de kop naar links verplaatsen.

Hoe "rekent" zo'n NDTM?

Dit betekent dat uitgaande van de configuratie $u\,q_1\,av$ de voorbeeld NDTM drie verschillende mogelijke vervolgconfiguraties bezit.

Wat betekent dit?

Drie mogelijke zienswijzen zijn:

- De NDTM "kiest" een willekeurige vervolgstap (niet-deterministisch).
- De NDTM "kiest" altijd de goede vervolgstap.
- De NDTM doet alle mogelijke vervolgstappen parallel.

Berekening niet-deterministische TM (NDTM)

Een berekening van een NDTM (gegeven een invoerwoord) kan worden gerepresenteerd als een boom waarvan de knopen configuraties voorstellen en de takken de transities. De wortel van die boom stelt dan de startconfiguratie voor en voor elke knoop geldt, tenzij die een stopconfiguratie voorstelt, dat deze als dochterknopen alle mogelijke configuraties bezit die mogelijkerwijs worden opgeleverd door de configuratie behorende bij die knoop.

Accepteren door NDTM's

Is op dezelfde wijze gedefinieerd als voor TM's:

Een NDTM M accepteert het woord w d.e.s.d.a. er een reeks configuraties $C_1, C_2, \ldots, C_k$ bestaat, zodanig dat:

- C_1 is een startconfiguratie;
- iedere C_i levert C_{i+1} op $(1 \leq i < k)$; en
- C_k is een accepterende configuratie.

Een woord wordt dus door een NDTM geaccepteerd als er een 'accepterend pad' in de berekeningsboom bestaat, d.w.z. een pad met een accepterende configuratie aan het eind.

Paden in berekeningsbomen

Gegeven een NDTM M en een invoerwoord w, zijn er 3 mogelijkheden voor paden in de bijbehorende berekeningsboom:

- eindigend in een accepterende toestand — $w \in L(M)$;
- eindigend in een verwerpende toestand — zo'n pad geeft geen informatie, dus $w \in L(M)$ of $w \notin L(M)$ beide mogelijk;
- niet eindigend (oneindige tak) — geeft geen informatie.

Moraal: false negatives zijn toegestaan, false positives daarentegen niet!

Taal van een NDTM

Zij M een NDTM. De taal $L(M)$ van M is de verzameling:

$$L(M) = \{w \mid M \text{ accepteert } w\}.$$

Men zegt dat M een niet-deterministische herkenner is van L.

Voorbeeld NDTM

Zij $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geef een implementatiebeschrijving van een NDTM die de taal L herkent waarbij:

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \text{er is een } x \in \Sigma \text{ met } n_x(w) \geq 7\}.$$

NB: $n_x(w)$ staat voor het aantal voorkomens van het symbool x in w. In dit voorbeeld is x dus een element van Σ.

Interessante opgaven

Sipser p. 161 e.v.: 3.10, 3.11, 3.12, 3.13.