IN2505-II Berekenbaarheidstheorie

College 3

Hans Tonino

Algoritmiekgroep
Faculteit EWI – TU Delft

16 april 2009

Vorig college

- Multi-tape TM's
- Vergelijking rekenkracht 1-TM en k-TM ($k > 1$)
- Niet-deterministische TM's
- Berekeningsboom

Aanbevolen opgaven

Sipser p. 161 e.v.: 3.10, 3.11, 3.12, 3.13.

Voorbeeld NDTM

Zij $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geef een implementatiebeschrijving van een NDTM die de taal L herkent waarbij:

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \text{er is een } x \in \Sigma \text{ met } n_x(w) \geq 7\}.$$

NB: $n_x(w)$ staat voor het aantal voorkomens van het symbool x in w. In dit voorbeeld is x dus een element van Σ.

Equivalentie TM's en NDTM's (Th. 3.16)

Voor iedere niet-deterministische TM bestaat een equivalente deterministische TM.

NDTM's en herkenbaarheid (Cor. 3.18)

Een taal L is Turing-herkenbaar d.e.s.d.a. er een NDTM M bestaat zodanig dat $L(M) = L$.

Beslissen door een NDTM

Een NDTM M is een niet-deterministische beslisser voor een taal L d.e.s.d.a. $L(M) = L$ en voor alle invoerwoorden w geldt dat alle mogelijke paden in de berekeningsboom voor M en w eindigen in een stopconfiguratie.

(Sipser p. 154)

NDTM's en beslisbaarheid (Cor. 3.19)

Een taal L is Turing-beslisbaar d.e.s.d.a. er een niet-deterministische beslisser voor L bestaat.

Benodigde stelling: König's Lemma

Een boom die eindig vertakkend is en die een oneindig aantal knopen bevat, bezit een oneindig lang pad.

Omkering: Een zich eindig vertakkende boom die geen oneindig lange paden bezit, heeft een eindig aantal knopen.

Opgave

Zij M een deterministische TM die L herkent. Welke uitspraken zijn juist?

- Als $w \in L$ dan stopt M op w in de accepterende toestand.
- Als $w \notin L$ dan stopt M niet op w.
- Als $w \in L$ dan kan M "loopen" op w.
- Als $w \notin L$ dan stopt M in de verwerpende toestand.

Opgave

Zij M een NDTM die L herkent. Welke uitspraken zijn juist?

- Als $w \in L$ dan stopt M altijd op w in de accepterende toestand.
- Als $w \notin L$ dan kan M in de accepterende toestand stoppen op w.
- Als $w \in L$ dan kan M in de verwerpende toestand stoppen op w.
- Als $w \notin L$ dan stopt M in de verwerpende toestand.
- Als $w \in L$ dan kan M "loopen" op w.
- Als $w \notin L$ dan kan M "loopen" op w.

Herkenbaarheid bij NDTM's

Zij M een NDTM die taal L herkent.

Voor woorden $w \in L$ geldt dat er minimaal één accepterend pad in de berekeningsboom moet bestaan. Zo'n pad is dan eindig. Andere paden verwerpen w mogelijkerwijs of zijn oneindig lang.

Voor woorden $w \notin L$ geldt dat er geen accepterend pad in de berekeningsboom bestaat.

Opgave

Zij M een NDTM die L beslist. Welke uitspraken zijn juist?

- Als $w \in L$ dan stopt M altijd op w in de accepterende toestand.
- Als $w \notin L$ dan kan M in de accepterende toestand stoppen op w.
- Als $w \in L$ dan kan M in de verwerpende toestand stoppen op w.
- Als $w \notin L$ dan stopt M in de verwerpende toestand.
- Als $w \in L$ dan kan M "loopen" op w.
- Als $w \notin L$ dan stopt M altijd op w in de verwerpende toestand.

Beslisbaarheid bij NDTM's

Zij M een NDTM die taal L beslist.

Voor woorden $w \in L$ geldt dat er minimaal één accepterend pad in de berekeningsboom moet bestaan. Alle paden voor w zijn eindig, maar hoeven niet allemaal accepterend te zijn.

Voor woorden $w \notin L$ geldt dat alle paden in de berekeningsboom w moeten verwerpen.

Opgave

Zij M een niet-deterministische herkenner voor L. Stel dat voor een gegeven woord w geldt dat alle berekeningspaden in de boom voor M en w eindigen in een verwerpende configuratie. Welke uitspraak is juist?

- $w \in L$;
- $w \notin L$;
- we kunnen hierover geen uitspraak doen.

Voorbeeld NDTM

Zij $\Sigma = \{1\}$. Geef een implementatiebeschriving van een NDTM die de taal $L \subseteq \Sigma^*$ beslist, waarbij

$$L = \{1^n \mid \text{er bestaat een } m \in \mathbb{N} \text{ met } m > 1 \text{ en } n \bmod m^2 = 0\}.$$

Constructie NDTM's

Fase 1: Gok een oplossing.
Fase 2: Check de oplossing: als deze voldoet, ga naar q_{accept}, anders ga naar q_{reject}.

Opgave

Beschouw de volgende taal $L \subseteq \{a, b, c\}^*$:

$$L = \{uvw \mid |v| > 0 \text{ en } n_a(v) + n_b(v) = n_c(v)\}.$$

Geef een implementatiebeschrijving van een niet-deterministische herkenner voor L die haar invoer hooguit 2 keer scant en die niet meer dan 2 hulptapes gebruikt.
Deze Turingmachine dient "echt" niet-deterministisch te zijn. Dat wil zeggen dat de machine geen deterministische Turingmachine mag zijn.