IN2505-II Berekenbaarheidstheorie

College 7

Hans Tonino

Algoritmiekgroep
Faculteit EWI – TU Delft

10 mei 2009

Beslisbare talen (1)

De talen:

$$
\begin{aligned}
A_{\text{DFA}} &= \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ is een DFA die } w \text{ accepteert}\}\\
A_{\text{NFA}} &= \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ is een NFA die } w \text{ accepteert}\}\\
E_{\text{DFA}} &= \{\langle M\rangle \mid M \text{ is een DFA met } L(M) = \emptyset\}\\
EQ_{\text{DFA}} &= \{\langle M_1, M_2\rangle \mid M_1 \text{ en } M_2 \text{ zijn DFA's met } L(M_1) = L(M_2)\}
\end{aligned}
$$

zijn beslisbaar (Thms 4.1, 4.2, 4.4 en 4.5).

Beslisbare talen (2)

De talen:

$$
\begin{aligned}
A_{\text{CFG}} &= \{\langle G, w\rangle \mid G \text{ is een CFG die } w \text{ voortbrengt}\}\\
E_{\text{CFG}} &= \{\langle G\rangle \mid G \text{ is een CFG met } L(G) = \emptyset\}
\end{aligned}
$$

zijn beslisbaar (Thms 4.7 en 4.8).

Beslisbare talen (3)

Iedere contextvrije taal is beslisbaar (Th. 4.9).

Opgave

Zij V de verzameling van alle functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zodanig dat voor ieder van die functies f er een $y \in \mathbb{N}$ bestaat waarvoor geldt $f(x) < y$ voor alle $x \in \mathbb{N}$. Met andere woorden:

$$V = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists y \forall x \cdot f(x) < y\}.$$

Ga na of deze verzameling al dan niet aftelbaar is en geef hiervoor een bewijs.

Het Stopprobleem

Bestaat er een computerprogramma $P(x, y)$ dat voor iedere invoer bestaande uit een computerprogramma x en invoer y voor programma x, beslist of programma x op invoer y stopt of niet?

Antwoord

NEEN

Informeel bewijs

Neem aan dat $P(x, y)$ bestaat. Beschouw:

```
procedure Q (x: string);
  function P (x, y: string): boolean;
    begin
      ...
    end;
  begin
    if not P(x, x)
      then return
      else loop
  end;
```

Stopt `Q(Q)`?

Het Acceptatieprobleem, formeel

Voordat we het Stopprobleem zullen bekijken, behandelen we het Acceptatieprobleem dat een variant hiervan is:

$$A_{\mathsf{TM}} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ is een TM en } M \text{ accepteert } w\}.$$

A_{TM} is niet beslisbaar (Th. 4.11), maar wel Turing-herkenbaar.

A_{TM} is Turing-herkenbaar

De volgende TM U herkent de taal A_{TM}:

U = "Op invoer $\langle M, w\rangle$, waarbij M een TM is en w invoer hiervoor:

1. Simuleer M op invoer w.
2. Als M in een accepterende toestand geraakt, accepteer; als M in een verwerpende toestand geraakt, verwerp."

LET OP: U behoeft niet voor iedere invoer $\langle M, w\rangle$ te termineren!

Universele Turingmachine (UTM)

De TM U uit de vorige sheet is een Universele Turingmachine (UTM). Een UTM is in staat willekeurige TM's te draaien op willekeurige input. In feite is iedere moderne computer een UTM: we kunnen er willekeurige programma's op draaien.

Een UTM belichaamt het concept stored programme, d.w.z. de TM (het programma) is, net als zijn invoerwoord (de data), opgeslagen op de tape van de UTM (het geheugen). De TM en haar invoer vormen tezamen de invoer voor de UTM.

A_{TM} is niet beslisbaar

Bewijs uit ongerijmde: Stel dat A_{TM} wel beslisbaar is (de aanname).

We laten zien dat we uit deze aanname een tegenspraak kunnen afleiden.

Gevolg van aanname

Dan bestaat er een TM H die A_{TM} beslist:

$$H(\langle M, w\rangle) = \begin{cases} \text{accepteer} & \text{als } M \text{ invoer } w \text{ accepteert,} \\ \text{verwerp} & \text{als } M \text{ invoer } w \text{ niet accepteert.} \end{cases}$$

Constuctie gebaseerd op H

Construeer dan de volgende TM D die H gebruikt:

D = "Op invoer $\langle M\rangle$, waarbij M een TM is:

1. Draai H op invoer $\langle M, \langle M\rangle\rangle$.
2. Geef als output het tegendeel van wat H als output geeft; m.a.w. als H accepteert, verwerp, en als H verwerpt, accepteer."

Tegenspraak

We verkrijgen een tegenspraak als we ons gaan afvragen:

Wat doet $D(\langle D\rangle)$???

Uit de tegenspraak concluderen we dat een beslisster H niet kan bestaan. Derhalve is A_{TM} niet beslisbaar.

In feite bevat het bewijs, in verhulde vorm, de diagonaalmethode...

Een niet-Turing-herkenbare taal

Een taal L is co-Turing-herkenbaar als $\overline{L}$ Turing-herkenbaar is.

Een taal is beslisbaar d.e.s.d.a. deze zowel Turing-herkenbaar als co-Turing-herkenbaar is (Th. 4.22).

De taal $\overline{A_{\mathsf{TM}}}$ is niet Turing-herkenbaar (Cor. 4.23).

Opgave

Definieer dat een taal C de talen A en B separeert d.e.s.d.a. $A \subseteq C$ en $B \subseteq \overline{C}$.

Bewijs dat er voor ieder paar disjuncte co-Turingherkenbare talen een beslisbare taal bestaat die deze separeert.

Hint: denk aan het bewijs van Th. 4.22.

Aanbevolen opgaven

Sipser p. 184 e.v.: 4.1 (abcef), 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.16, 4.17, 4.18, 4.28.

Hint bij 4.16: Zij m en n het aantal toestanden van de twee DFA's. Neem als maximale lengte van de te onderzoeken woorden mn.