IN2505-II Berekenbaarheidstheorie

College 8

Hans Tonino

Algoritmiekgroep
Faculteit EWI – TU Delft

14 mei 2009

Vorig college

- Beslisbaarheidseigenschappen DFA's en CFG's
- Onbeslisbaarheid Stopprobleem, informeel
- Onbeslisbaarheid A_{TM}, formeel
- Relatie met diagonaalmethode
- Talen die T-herkenbaar en co-T-herkenbaar zijn, zijn beslisbaar

Opgave

Zij V de verzameling van alle functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zodanig dat voor ieder van die functies f er een $y \in \mathbb{N}$ bestaat waarvoor geldt $f(x) < y$ voor alle $x \in \mathbb{N}$. Met andere woorden:

$$V = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists y \forall x \cdot f(x) < y\}.$$

Ga na of deze verzameling al dan niet aftelbaar is en geef hiervoor een bewijs.

Oplossing opgave

V is niet aftelbaar.

Bewijs: Stel V is wel aftelbaar. Dan bestaat er een aftelling $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ van V. Definieer nu:

$$g(n) = (f_n(n) + 1) \bmod 2.$$

Dan geldt:

1. $g \in V$, immers $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en $g(n) < 2$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
2. g kan niet in de aftelling voorkomen, wegens de diagonaalconstructie.

Wat is reductie?

Stel je hebt twee problemen A en B, en je hebt een methode om B op te lossen.

Stel je hebt bovendien een methode om probleem A te reduceren naar probleem B.

Conclusie: je kunt nu ook probleem A oplossen.

Voorbeeld reductie

We weten hoe we natuurlijke getallen kunnen optellen (lagere school). Met dit gegeven kunnen we ook vermenigvuldigen, immers:

$$\begin{cases} 0 \cdot m & = \quad 0 \\ (n+1) \cdot m & = \quad n \cdot m + m. \end{cases}$$

Met deze recursieve definitie (programmeerbaar in bijvoorbeeld Haskell) is vermenigvuldiging gereduceerd (teruggebracht) tot herhaald optellen.

Reductie

Zij A en B problemen (talen). Als A gereduceerd kan worden naar B, dan betekent dat:

1. een oplossingsmethode voor B een oplossingsmethode voor A geeft;
2. als er voor A geen oplossingsmethode bestaat, er ook geen oplossingsmethode voor B kan bestaan.

Notatie voor reductie: $A \leq B$.

Dit kun je ook lezen als:

A is makkelijker dan of even moeilijk als B.

Vormen van reductie

Sipser geeft 3 vormen van reductie:

1. directe reductie (eigen terminologie),
2. reductie via berekeningsgeschiedenissen (computation histories), en
3. reductie via afbeeldingen (mapping reducibility).

Het Stopprobleem (directe reductie)

Het Stopprobleem

$$HALT_{\mathsf{TM}} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ is een TM en } M \text{ stopt op invoer } w\}.$$

is niet beslisbaar (Th. 5.1).

Bewijs: Reductie van A_{TM} naar $HALT_{\mathsf{TM}}$. We moeten dus laten zien dat $A_{\mathsf{TM}} \leq HALT_{\mathsf{TM}}$.
We stellen dat we over een beslissingsprocedure voor $HALT_{\mathsf{TM}}$ beschikken, en laten dan zien hoe dat ons een beslissingsprocedure voor A_{TM} zou opleveren.

Opgave

Definieer dat een taal C de talen A en B separeert d.e.s.d.a. $A \subseteq C$ en $B \subseteq \overline{C}$.

Bewijs dat er voor ieder paar disjuncte co-Turingherkenbare talen een beslisbare taal bestaat die deze separeert.

Hint: denk aan het bewijs van Th. 4.22.

Directe reductie 2

De taal E_{TM} gedefinieerd door

$$E_{\mathsf{TM}} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ is een TM en } L(M) = \emptyset\}$$

is niet beslisbaar (Th. 5.2).

Bewijs: via directe reductie:

$$A_{\mathsf{TM}} \leq E_{\mathsf{TM}}.$$

Neem aan dat R een TM is die E_{TM} beslist.

Hulpconstructie

Om R te kunnen gebruiken, modificeren we M:

M_1 = **"**Op invoer x:

1. Als $x \neq w$, verwerp.
2. Als $x = w$, draai M op invoer w, en accepteer als M invoer w accepteert.**"**

Er geldt nu:

$$L(M_1) \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ accepteert } w.$$

Deze M_1 kunnen we "voeren" aan de beslisser R.

Niet-reguliere talen

Er bestaan niet-reguliere talen:

Zij $\Sigma = \{0,1\}$. De taal $L \subseteq \Sigma^*$ gedefinieerd door

$$L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

is niet regulier (Sipser, Ex. 1.73).

"Een DFA kan niet onthouden wat zij gelezen heeft."

Directe reductie 3

De taal $REGULAR_{\mathsf{TM}}$ gedefinieerd door

$$REGULAR_{\mathsf{TM}} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ is een TM en } L(M) \text{ is regulier}\}$$

is niet beslisbaar (Th. 5.3).

Bewijs: via directe reductie:

$$A_{\mathsf{TM}} \leq REGULAR_{\mathsf{TM}}.$$

Neem aan dat R een TM is die $REGULAR_{\mathsf{TM}}$ beslist. Maak vervolgens gebruik van het feit dat er niet-reguliere talen bestaan.

Constructie

Definieer de volgende TM M_2:

M_2 = **"**Op invoer x:

1. Als x van de vorm $0^n 1^n$ is, accepteer.
2. Als x deze vorm niet heeft, draai M op w en accepteer als M accepteert.**"**

Er geldt nu:

$$\begin{array}{lcl} L(M_2) = \Sigma^* & \Leftrightarrow & M \text{ accepteert } w \\ L(M_2) = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\} & \Leftrightarrow & M \text{ accepteert } w \text{ niet} \end{array}$$

Deze M_2 kunnen we "voeren" aan de beslisser R.