IN2505-II Berekenbaarheidstheorie

College 9

Hans Tonino

Algoritmiekgroep
Faculteit EWI – TU Delft

18 mei 2009

Niet-contextvrije talen

Er bestaan niet-contextvrije talen:

Zij $\Sigma = \{a, b, c\}$. De taal $L \subseteq \Sigma^*$ gedefinieerd door

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

is niet contextvrij (Sipser, Ex. 2.36).

"Een PDA kan maar één keer poppen wat zij gepusht heeft."

Opgave

Bewijs met behulp van directe reductie dat

$$CF_{\text{TM}} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ is een TM en } L(M) \text{ is context-vrij}\}$$

niet beslisbaar is.

Reduceerbaarheid, formeel

Een functie $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ is berekenbaar als er een TM M bestaat die op iedere invoer w stopt met $f(w)$ op haar tape. (Def. 5.17)

Berekenbare functies kunnen bijvoorbeeld worden gebruikt om beschrijvingen van TM's te genereren, gegeven bepaalde invoer.

NB: Neem aan dat een dergelijke TM altijd stopt in de accepterende toestand.

Mapping (many-to-one) reducibility (Def. 5.20)

Taal A is mapping reducible tot taal B, notatie $A \leq_m B$, als er een berekenbare functie $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ bestaat, zodanig dat voor iedere $w \in \Sigma^*$ geldt:

$$w \in A \quad \Leftrightarrow \quad f(w) \in B.$$

De functie f wordt de reductie van A naar B genoemd.

Let op Voor een reductie f geldt derhalve:

$$\begin{array}{lcl} w \in A & \Rightarrow & f(w) \in B, \text{ èn} \\ w \notin A & \Rightarrow & f(w) \notin B. \end{array}$$

Eigenschappen reductie 1

Als $A \leq_m B$ en B is beslisbaar, dan is A beslisbaar. (Th. 5.22)

Als $A \leq_m B$ en A is onbeslisbaar, dan is B onbeslisbaar. (Cor. 5.23)

$A \leq_m B$ dan en slechts dan als $\overline{A} \leq_m \overline{B}$.

Voorbeeld 1 mapping reduction

In plaats van de directe reductie $A_{\mathsf{TM}} \leq HALT_{\mathsf{TM}}$ kan kan een mapping reduction $A_{\mathsf{TM}} \leq_m HALT_{\mathsf{TM}}$ worden gegeven waarbij de reductie f wordt berekend door de TM F:

F = "Op invoer $\langle M, w\rangle$:

1. Construeer de volgende TM M'

M' = "Op invoer x:

1. Draai M op x.

2. Accepteer als M accepteert.

3. "Loop" als M verwerpt."

2. Geef als output $\langle M', w\rangle$."

Voorbeeld 2 mapping reduction

Ook de reductie $E_{\mathsf{TM}} \leq EQ_{\mathsf{TM}}$ kan eenvoudig als een mapping reduction worden opgevat. De reductie f is hierbij gedefinieerd door:

$$f(\langle M\rangle) = \langle M, M_\emptyset\rangle,$$

waarbij $M_\emptyset$ een machine is die alle invoer verwerpt.

Eigenschappen reductie 2

Als $A \leq_m B$ en B is Turing-herkenbaar, dan is A Turing-herkenbaar. (Th. 5.28)

Als $A \leq_m B$ en A is niet Turing-herkenbaar, dan is B niet Turing-herkenbaar. (Cor. 5.29)

Opgave

We hebben laten zien dat A_{TM} direct reduceerbaar is naar E_{TM}, m.a.w. $A_{\mathsf{TM}} \leq E_{\mathsf{TM}}$, hetgeen wilde zeggen dat een beslissingsprocedure voor E_{TM} een beslissingsprocedure voor A_{TM} zou opleveren.

Laat zien dat niet geldt $A_{\mathsf{TM}} \leq_m E_{\mathsf{TM}}$.

Hint: Wat weet je over $\overline{E_{\mathsf{TM}}}$?

Voorbeeld 3 mapping reduction

In de directe reductie $A_{\mathsf{TM}} \leq E_{\mathsf{TM}}$ is eigenlijk sprake van een mapping reductie:

$$A_{\mathsf{TM}} \leq_m \overline{E_{\mathsf{TM}}},$$

met behulp van de reductie f gedefinieerd door:

$$f(\langle M, w\rangle) = \langle M_1\rangle,$$

waarin M_1 een machine is met de eigenschap:

$$M \text{ accepteert } w \quad \Leftrightarrow \quad L(M_1) \neq \emptyset.$$

Voorbeeld 4 mapping reduction

EQ_{TM} is niet Turing-herkenbaar, en ook niet co-Turing-herkenbaar. (Th. 5.30)

Bewijs

- Om te bewijzen dat EQ_{TM} niet Turing-herkenbaar is, tonen we aan: $\overline{A_{\mathsf{TM}}} \leq_m EQ_{\mathsf{TM}}$.
- Voor het tweede deel, EQ_{TM} niet co-Turing-herkenbaar, laten we zien: $\overline{A_{\mathsf{TM}}} \leq_m \overline{EQ_{\mathsf{TM}}}$, ofwel $A_{\mathsf{TM}} \leq_m EQ_{\mathsf{TM}}$.

Opgave

Zij A een taal. Bewijs dat de volgende uitspraak geldt.

A is Turing-herkenbaar d.e.s.d.a. $A \leq_m A_{\mathsf{TM}}$.

Oplossing

($\Leftarrow$) Stel $A \leq_m A_{\mathsf{TM}}$. Omdat A_{TM} Turing-herkenbaar is, moet A dat ook zijn (Th. 5.28).

($\Rightarrow$) Stel A is Turing-herkenbaar. Dan bestaat er een TM M_A die de taal A herkent, m.a.w. $L(M_A) = A$. De functie f die een $w \in A$ afbeeldt op $\langle M_A, w \rangle$ is dan de gezochte reductie, immers (ga na!):

$$w \in A \text{ d.e.s.d.a. } f(w) = \langle M_A, w \rangle \in A_{\mathsf{TM}}.$$

Uiteraard is aan de eis voldaan dat f een berekenbare functie is.

Aanbevolen opgaven

Sipser p. 215 e.v.: 5.2 t/m 5.15, 5.17 t/m 5.20, 5.22, 5.23, 5.30.