TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4
2628 CD Delft

IN2505 II Berekenbaarheidstheorie

Proeftentamen

BELANGRIJK

Beschikbare tijd 3 uur.

Gebruik hulpmiddelen Bij het tentamen mogen geen boeken, aantekeningen, of andere bronnen worden geraadpleegd. Tevens mag er geen gebruik worden gemaakt van rekenmachines.

Puntentelling Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven. Voor elke opgave zijn 10 punten te verdienen. Alle opgaven tellen even zwaar mee.

Algemeen Het de bedoeling om iedere opgave te beginnen op een nieuwe zijde.

---

1. Zij $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ talen over een alfabet Σ. Laat de *concatenatie* L_1L_2 van L_1 en L_2 gedefinieerd zijn als $L_1L_2 = \{w_1w_2 \mid w_1 \in L_1 \text{ en } w_2 \in L_2\}$.

   (a) Geef een definitie van het begrip *beslisbare taal* (Eng.: decidable language). (2 punten)

   (b) Bewijs dat voor elk paar *beslisbare* talen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, de concatenatie L_1L_2 ook *beslisbaar* is. (8 punten)

2. Zij V de verzameling van alle functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zodanig dat $f(x) \leq x$ voor alle x. Met andere woorden:

   $$V = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f(x) \leq x \text{ voor alle } x\}.$$

   (a) Geef een definitie van het begrip *aftelbare verzameling* (Eng.: countable set). (2 punten)

   (b) Ga na of V aftelbaar is of niet (2 punten) en geef een bewijs van uw opvatting (indien de verzameling niet aftelbaar is, dient u een bewijs te geven met behulp van de diagonaalmethode). (6 punten)

3. Beschouw de klasse van Deterministische Eindige Automaten (DFA's) over een gegeven alfabet Σ. Zij:

   $$ALL_{\mathsf{DFA}} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ is een } \mathsf{DFA} \text{ en } L(M) = \Sigma^*\}.$$

   Bewijs dat ALL_{DFA} *beslisbaar* (Eng.: decidable) is.

4. Beschouw voor een gegeven alfabet Σ het volgende probleem:

$$D = \{\langle M \rangle \mid M \text{ is een } \mathsf{TM} \text{ en } L(M) \text{ bevat precies één woord}\}$$

Met andere woorden, D bestaat uit die (coderingen van) Turing-machines M die precies één woord accepteren.

Bewijs met behulp van *mapping reduction* dat D niet beslisbaar (Eng.: *undecidable*) is. Uw bewijs dient daarbij uit 2 delen te bestaan:

(a) Een beschrijving van de *reductie(functie)* f. (5 punten)

(b) Het bewijs dat deze f inderdaad aan de eisen van een mapping reduction voldoet. (5 punten)

5. Zij P de klasse van alle Turing-machines met het zelfde tape-alfabet $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$ die wanneer gestart op een lege tape stoppen. Beschouw de functie $BB : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die gedefinieerd is door:

$$BB(n) \quad = \quad \text{het maximum aantal 1-en dat door een TM uit } P$$
$$\text{met } n \text{ toestanden kan worden geprint.}$$

Bijvoorbeeld: $BB(3)$ is dus gedefinieerd als het maximum van alle aantallen 1-en die door Turing-machines met 3 toestanden uit P kunnen worden geprint, indien deze starten op een lege tape en stoppen in de accepterende toestand.

Laat zien dat de functie BB niet *berekenbaar* (Eng: computable) is.

EINDE TENTAMEN