

THERMODYNAMICA 2
(WB1224)

24 augustus 2011
18.30 - 21.30 u.

AANWIJZINGEN

Het tentamen bestaat uit twee open vragen op 7 bladzijden.

Het tentamen is een **GESLOTEN BOEK** tentamen. Dit betekent dat tijdens het tentamen uitsluitend het uitgereikte formuleblad mag worden geraadpleegd. Gebruik van aantekeningen of andere hulpmiddelen (zoals een eigen formuleblad) is *niet* toegestaan. Gebruik van een (niet programmeerbaar) rekenapparaat is wel toegestaan.

Elke opgave moet op een afzonderlijk blad worden ingeleverd.

Zorg er voor dat het ingeleverde werk (elk blad afzonderlijk) is voorzien van naam en studienummer.

Zorg ervoor dat bij het inleveren alle bladen in elkaar zijn gevouwen.

Gebruik bij het beantwoorden van de vragen een zwarte of blauwe pen. Het gebruik van een rode pen en/of potlood is niet toegestaan.

Geef bij het beantwoorden van de vragen zo duidelijk mogelijk aan hoe het antwoord is verkregen: laat zien welke relaties zijn gebruikt en waar deze relaties op zijn gebaseerd.

Vermeld bij de uitkomsten de eenheden en kijk of de gevonden waarden realistisch zijn. Zo niet, geef aan waarom.

OPGAVE 1

De warmtecapaciteit bij constante druk, c_p , is voor een willekeurige stof als volgt gedefinieerd:

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_{p,N}$$

Omdat de enthalpie h in principe zowel van de druk als temperatuur afhangt, zal in het algemeen ook c_p zowel van de temperatuur als van de druk afhangen.

(a) Leid af dat voor de drukafhankelijkheid van c_p voor elke stof geldt dat

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p} \right)_{T,N} = -T \left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2} \right)_{p,N}$$

(b) Laat zien dat uit bovenstaande formule volgt, dat c_p van een ideaal gas niet afhangt van de druk.

(c) In een stationair smoorproces wordt met behulp van een smoorklep (throttle) de druk van een gas verlaagd zonder arbeid te winnen. Indien de smoorklep goed geïsoleerd is, zal voor een ideaal gas de temperatuur van de uitstroom vaak gelijk zijn aan die van de instroom. Leg met behulp van de 1^e hoofdwet voor open systemen kort uit waarom dit zo is en welke aannames hier van toepassing zijn.

Voor vloeibaar water bij 298.15K en 1 atm. zijn de volgende gegevens beschikbaar:

- de isobare uitzettingscoëfficiënt $\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p,N} = 256 * 10^{-6} K^{-1}$
- de temperatuursafhankelijkheid van β : $\left(\frac{\partial \beta}{\partial T} \right)_{p,N} = 9.6 * 10^{-6} K^{-2}$
- het specifieke volume bij 298.15K en 1 atm. = 1.003 cm³g⁻¹.
- de molaire massa van water: 18.02 gram per mol.

NB Water is dus geen ideaal gas! Een druk van 1 atm. is gelijk aan 101325 Pa.

(d) Bereken met behulp van bovenstaande gegevens de waarde van de grootte $\left(\frac{\partial c_p}{\partial p} \right)_{T,N}$ voor vloeibaar water bij 298.15K en 1 atm. Let op de juiste eenheden.

(vervolg van deze opgave staat op de volgende bladzijde)

De grootheid isotherme compressibiliteit κ is gedefinieerd als

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{T,N}$$

1 gram vloeibaar water bevindt zich in een volume van 1.003 cm^3 bij 298.15K en 1 atm . Bij een *constant volume* wordt het water *reversibel* verwarmd. De waarde van κ voor vloeibaar water bij 298.15K en 1 atm is gelijk aan $46 \cdot 10^{-6} \text{ bar}^{-1}$ en hangt bij benadering niet af van temperatuur en druk.

- (e) Bereken de arbeid van dit proces.
- (f) Maak met behulp van de gegevens voor κ en β van water een slimme schatting van de druk op het moment dat de temperatuur van het water 299.15K is geworden. Hint: denk aan het gebruiken van de -1 regel voor de benodigde partiële afgeleide.
- (g) Om de benodigde warmte voor dit proces uit te kunnen rekenen moeten we de waarde van nog een grootheid kennen. Welke grootheid is dit? Geef een korte uitleg.

OPGAVE 2

Een Diesel en een Otto motor hebben de volgende gegevens:

Inlaat temperatuur	$T_{\text{intake}} = 293.15 \text{ K}$
Inlaat druk	$p_{\text{intake}} = 1.013 \text{ bar}$
Maximum cyclus temperatuur	$T_{\text{max}} = 2000 \text{ K}$
Compressie verhouding (in druk)	$\beta = 10$

Bovendien is gegeven:

- De thermodynamische cyclus van zowel de Diesel- als de Otto-motor kan als *ideaal* worden aangenomen.
- Het werkzame fluïdum is *lucht*, en de polytropische ideale gaswet is van toepassing. De verhouding tussen isobare en isochore specifieke warmte γ is constant en heeft de waarde 1.4. De specifieke gasconstante is $R = 287.0 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$.

Beantwoord de volgende vragen:

- (a) Maak een schets van de Diesel en Otto cyclus in het T - s thermodynamisch diagram, en geef het verschil tussen beide aan.
- (b) Maak een tabel waarin voor elk van de 4 toestanden van de cycli de waardes van de volgende thermodynamische eigenschappen staan: s , u , h , v , T , P . Doe dit voor beide cycli. De missende eigenschappen van lucht als functie van temperatuur zijn in willekeurige volgorde in de onderstaande tabel gegeven.

T [K]	v [m^3/kg]	u [kJ/kg]	h [kJ/kg]	s [kJ/kg·K]
293.15	0.831	-89.16	-5.03	6.84
565.98	0.160	106.59	269.03	6.84
1035.89	0.831	443.76	741.06	7.75
1716.26	0.567	931.92	1424.49	8.11
2000	0.160	1135.50	1709.50	7.75
2000	0.567	1135.50	1709.50	8.11

- (c) Bereken de thermische efficiëntie van beide cycli.
- (d) Leid de formule af om de equivalente thermodynamische temperatuur uit te rekenen gerelateerd aan het verwarmingsproces van het werkzame fluïdum voor de ideale Diesel en Otto cyclus. Begin hierbij bij de steady-state exergie balans (zie formuleblad).
- (e) Bereken de equivalente thermodynamische temperatuur van het verwarmingsproces voor de ideale Diesel- en Otto-cyclus, $\bar{T}_{\text{heating,Diesel}}$ en $\bar{T}_{\text{heating,Otto}}$. Gebruik dit om uit te leggen welke van de twee processen minder exergieverlies veroorzaakt.

Formuleblad Thermodynamica 2, versie 18-4-2011

Ideale Gaswet $pV = nRT$ en dus $pv = RT$

Constantes $R = 8.314472 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ $N_{AV} = 6.02214 \cdot 10^{23}$ moleculen/mol

1^{ste} HW gesloten systeem $dU = \delta Q - \delta W$

Reversibele arbeid $W = \int_{V_1}^{V_2} p dV$

1^{ste} HW open systeem $\frac{dE_{CV}}{dt} = \dot{Q}_{CV} - \dot{W}_{CV} - \dot{m}_2 \left(h_2 + \frac{c_2^2}{2} + gz_2 \right) + \dot{m}_1 \left(h_1 + \frac{c_1^2}{2} + gz_1 \right)$. Hierin wordt de uitgaande stroom aangeduid met "2" en de ingaande stroom met "1".

2^{de} HW gesloten systeem $dS = \frac{\delta Q}{T} + \delta S$ met $\delta S \geq 0$

2^{de} HW open systeem $\frac{dS_{CV}}{dt} = \frac{\dot{Q}_{CV}}{T^{trans}} - \dot{m}_2 s_2 + \dot{m}_1 s_1 + \dot{\sigma}_{CV}$ met $\dot{\sigma}_{CV} \geq 0$ waarbij het warmtetransport plaatsvindt bij temperatuur T^{trans}

Thermodynamische potentialen $H = U + pV$ $F = U - TS$ $G = U - TS + pV$

Veranderingen van U, H, F, G

$$dU = TdS - pdV + \mu dN \quad dH = TdS + Vdp + \mu dN$$

$$dF = -SdT - pdV + \mu dN \quad dG = -SdT + Vdp + \mu dN$$

Partiële afgeleiden voor $f(x,y)$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x dy = M dx + N dy \quad \text{dus} \quad M = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y \quad \text{en} \quad N = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x$$

Maxwell relatie voor $f(x,y)$

$$\text{Indien } df = M dx + N dy \text{ dan } \left(\frac{\partial M}{\partial y} \right)_x = \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_y \quad \text{oftewel} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x \right]_y = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y \right]_x$$

Integreren

$$f(x_2, y_1) = f(x_1, y_1) + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y dx$$

Min 1 regel

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x = -1$$

Definitie warmtecapaciteit

$$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,N} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V,N} \quad \text{en} \quad C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_{P,N} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{P,N}$$

Departure Gibbs energy

$$\ln \frac{f}{p} = \ln \varphi = \frac{\mu - \mu^{IG}}{RT} = \int_0^p \frac{Z(p) - 1}{p} dp$$

Clapeyron equation

$$\left(\frac{dp}{dT} \right)_{sat} = \frac{s_g - s_f}{v_g - v_f} = \frac{h_g - h_f}{T(v_g - v_f)}$$

Clausius-Clapeyron equation

$$\left(\frac{d \ln P}{dT} \right)_{sat} = \frac{h_g - h_f}{RT^2}$$

Carnot efficiency

$$\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_L}{T_H}$$

Thermal power cycle efficiency (I-law efficiency)

$$\eta_{th} = \frac{\dot{W}_{net}}{\dot{Q}_{in}}$$

Isentropic process for an ideal gas

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^\gamma = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\gamma-1} \quad \text{met} \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

Entropy change of an ideal gas with temperature and pressure and constant c_p

$$s(T_2, p_2) - s(T_1, p_1) = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Isentropic efficiencies for compression and expansion

$$\eta_{is,exp} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2,is}}, \quad \eta_{is,compr} = \frac{h_{2,is} - h_1}{h_2 - h_1}$$

COP (coefficient of performance)

$$COP_{cooling} = \frac{Q_C}{Q_H - Q_C} = \frac{T_C}{T_H - T_C}, \quad COP_{heating} = \frac{Q_H}{Q_H - Q_C} = \frac{T_H}{T_H - T_C}$$

Exergy: specific flow exergy and balances

$$ex_f = h - h_0 + \frac{v^2}{2} + gz - T_0(s - s_0)$$

$$\frac{dEx}{dt} = \dot{Ex}_{f,1} - \dot{Ex}_{f,2} + (h_0 - T_0 s_0)(\dot{M}_1 - \dot{M}_2) + \left(1 - \frac{T_0}{T_b}\right) \dot{Q} + \dot{W} + \dot{Ex}_d$$

$$\dot{M}(ex_{f,1} - ex_{f,2}) = - \left(1 - \frac{T_0}{T_b}\right) \dot{Q} + \dot{W} + \dot{Ex}_d$$

Opgave 1

$$a) \left(\frac{\partial c_p}{\partial p} \right)_{T,N} = \left(\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_{p,N} \right)_{T,N} = \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_{T,N} \right)_{p,N}$$

mit $dh = Tds + vdp$ folgt $\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_{T,N} = T \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_{T,N} + v$

(Maxwell-relatie folgend
mit dG) $= v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_{p,N}$

$$\text{dus } \left(\frac{\partial c_p}{\partial p} \right)_{T,N} = \left(\frac{\partial}{\partial T} \left[v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_{p,N} \right] \right)_{p,N}$$

$$= \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_{p,N} - T \left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2} \right)_{p,N} - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_{p,N}$$

$$= -T \left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2} \right)_{p,N}$$

b) ideal gas $pV = nRT$; $v = nRT/p$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_{p,N} = \frac{nR}{p} \quad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2} \right)_{p,N} = 0$$

$$\text{dus } \left(\frac{\partial c_p}{\partial p} \right)_{T,N} = 0$$

(c) 1^e hoofdwet open systeem (zie formule blad)

$$\text{stationaire} \Rightarrow \frac{dE_{cv}}{dt} = 0$$

$$\text{geen warmteoverdracht: } \dot{Q}_{cv} = 0$$

$$\text{geen arbeid: } \dot{W}_{cv} = 0$$

$$\text{aanname } \frac{c_2^2}{2} + g z_2 \ll h_2$$

$$\frac{c_1^2}{2} + g z_1 \ll h_1$$

$$\text{dus } h_1 = h_2$$

$$\text{voor een ideaal gas } h(T, p) = h(T)$$

daarom $T = \text{constant}$

$$\begin{aligned}
 (d) \left(\frac{\partial C_p}{\partial P} \right)_{T,N} &= -T \left(\frac{\partial^2 U}{\partial T^2} \right)_{P,N} \\
 &= -T \left(\frac{\partial}{\partial T} V \cdot \frac{1}{V} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{P,N} \right)_{P,N} \\
 &= -T \left(\frac{\partial(\beta V)}{\partial T} \right)_{P,N} = -TV \left(\beta^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial T} \right)_{P,N} \right)
 \end{aligned}$$

Nullen

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial C_p}{\partial P} \right)_{T,N} &= -(300\text{K}) \left(1,003 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{gram}} \right) \cdot \left(10,02 \frac{\text{gram}}{\text{mol}} \right) \\
 &\quad \times \left((256 \cdot 10^{-6})^2 + 9,6 \cdot 10^{-6} \right) (\text{K}^2) \\
 &= -5,2 \cdot 10^{-9} \frac{\text{m}^3}{\text{K mol}}
 \end{aligned}$$

(e) $dV = 0$ dus arbeid = 0

(f) Gevraagd wordt: $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N}$

-1 regel $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = -1$

$$\text{dus } \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{-\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T} = \frac{-\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P}{\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T} = \frac{\alpha}{\kappa}$$

$$= \frac{256 \cdot 10^{-6}}{46 \cdot 10^{-6}} \frac{\text{bar}}{\text{K}} = 5.56 \text{ bar/K}$$
$$= 5.56 \cdot 10^5 \text{ Pa/K}$$

druk bij 299.15 K $\Rightarrow 101325 \text{ Pa} + 5.56 \cdot 10^5 \text{ Pa/K} \cdot (1 \text{ K})$
 $= 6.50 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 6.50 \text{ bar}$

(g) $dU = dq$ (want arbeid is nul)

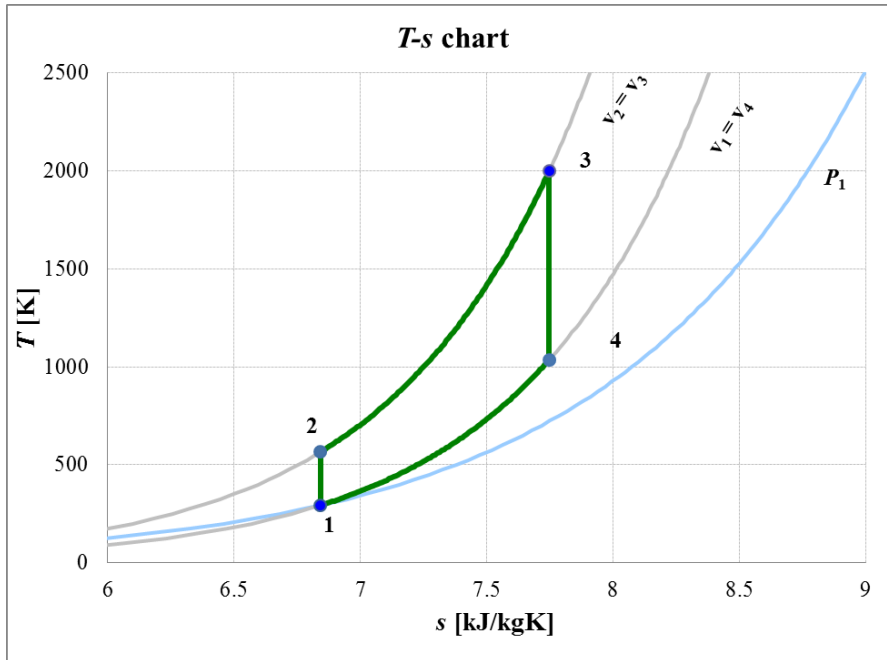
$$\Delta U = \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT$$

$\Rightarrow C_V(T)$ dus nodig

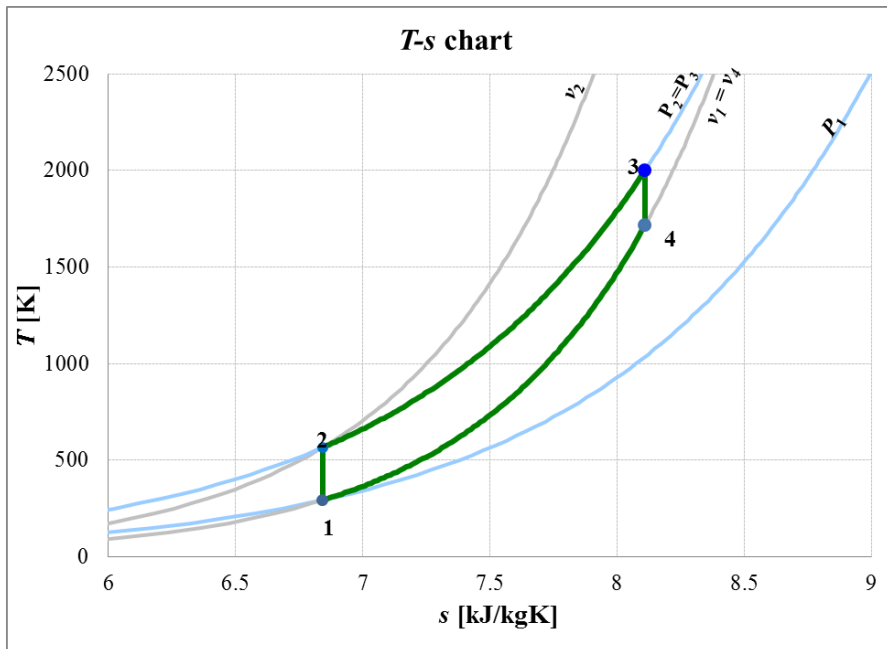
Uitwerking opgave 2

a)

Otto cycle



Diesel cycle



De overdracht van thermische energie naar het werkzame fluïdum vindt plaats bij constante specifiek volume in de ideale Otto cyclus en bij constante druk in de ideale Diesel cyclus.

b)

Otto cycle

STAAT 1

$$P_1 = 1.013 \text{ bar}$$

$$T_1 = 293.15 \text{ K}$$

$$\text{Ideaal gas: } v_1 = (R T_1) / P_1 = 0.831 \text{ m}^3/\text{kg}$$

Uit de tabel:

$$s_1 = 6.84 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$$

$$u_1 = -89.16 \text{ kJ/kg}$$

$$h_1 = -5.03 \text{ kJ/kg}$$

STAAT 2

$$P_2 = \beta P_1 = 10.13 \text{ bar}$$

Isentrope compressie van staat 1:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_1 \beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 565.98 \text{ K}$$

$$\text{Ideaal gas: } v_2 = (R T_2) / P_2 = 0.160 \text{ m}^3/\text{kg}$$

Uit de tabel:

$$s_2 = 6.84 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$$

$$u_2 = 106.59 \text{ kJ/kg}$$

$$h_2 = 269.03 \text{ kJ/kg}$$

STAAT 3

$$T_3 = 2000 \text{ K}$$

Isochore verwarming van het werkzame fluïdum:

$$v_3 = v_2 = 0.160 \text{ m}^3/\text{kg}$$

$$P_3 = (R T_3) / v_3 = 35.80 \text{ bar}$$

Uit de tabel:

$$s_3 = 7.75 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$$

$$u_3 = 1135.50 \text{ kJ/kg}$$

$$h_3 = 1709.50 \text{ kJ/kg}$$

STAAT 4

Isochore afkoeling van het werkzame fluïdum:

$$v_4 = v_1 = 0.830 \text{ m}^3/\text{kg}$$

Isentrope expansie van staat 3

$$T_4 = T_3 \left(\frac{v_3}{v_4} \right)^{\gamma-1} = T_3 \beta^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 1035.89 \text{ K}$$

$$\text{Ideaal gas: } P_4 = (R T_4) / v_4 = 3.58 \text{ bar}$$

Uit de tabel:

$$s_4 = 7.75 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$$

$$u_4 = 443.76 \text{ kJ/kg}$$

$$h_4 = 741.06 \text{ kJ/kg}$$

Diesel cycle

Staat 1 en 2 zijn gelijk aan Otto cycle

STAAT 3

$$T_3 = 2000 \text{ K}$$

Isobare verwarming van het werkzame
fluidum:

$$P_3 = P_2 = 10.13 \text{ bar}$$

$$v_3 = (R T_3) / P_3 = 0.567 \text{ m}^3/\text{kg}$$

Uit de tabel:

$$s_3 = 8.11 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$$

$$u_3 = 1135.50 \text{ kJ/kg}$$

$$h_3 = 1709.50 \text{ kJ/kg}$$

STAAT 4

Dit wordt berekend met de isentrope
relaties

$$v_4 = v_1 = 0.830 \text{ m}^3/\text{kg}$$

$$T_4 = T_3 \left(\frac{v_3}{v_4} \right)^{\gamma-1} = 1717.24 \text{ K}$$

$$P_4 = (R T_4) / v_4 = 5.93 \text{ bar}$$

Uit de tabel:

$$s_4 = 8.11 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$$

$$u_4 = 931.92 \text{ kJ/kg}$$

$$h_4 = 1424.49 \text{ kJ/kg}$$

c) De efficiënties kunnen met behulp van de thermische energie en arbeid per massa-eenheid berekend worden.

Otto cycle:

$$\eta = \frac{w_{net}}{q_{in}} = 1 - \frac{q_{out}}{q_{in}} = 1 - \frac{(u_4 - u_1)}{(u_3 - u_2)} = 1 - \frac{(443.76 + 89.16) \text{ kJ/kg}}{(1135.50 - 106.59) \text{ kJ/kg}} = 0.482$$

Diesel cycle:

$$\eta = \frac{w_{net}}{q_{in}} = 1 - \frac{q_{out}}{q_{in}} = 1 - \frac{(u_4 - u_1)}{(h_3 - h_2)} = 1 - \frac{(931.92 + 89.16) \text{ kJ/kg}}{(1709.50 - 269.03) \text{ kJ/kg}} = 0.291$$

d) De equivalente thermodynamische temperatuur is gedefinieerd als de constante temperatuur waarbij de warmteoverdracht plaats zou moeten vinden om eenzelfde hoeveelheid exergie-overdracht te genereren. De state-state exergie balans wordt dan:

$$m(e_{f,in} - e_{f,out}) = \left(1 - \frac{T_0}{\bar{T}}\right) \dot{Q}$$

$$\dot{Q} = m(h_{out} - h_{in})$$

$$m[(h_{out} - h_{in}) - T_0(s_{out} - s_{in})] = \left(1 - \frac{T_0}{\bar{T}}\right) m(h_{out} - h_{in})$$

$$\bar{T} = \frac{h_{out} - h_{in}}{s_{out} - s_{in}}$$

(e) Otto cycle:

$$\bar{T}_{heating} = \frac{h_3 - h_2}{s_3 - s_2} = \frac{(1709.50 - 269.03) \text{ kJ/kg}}{(7.75 - 6.84) \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}} = 1590.40 \text{ K}$$

Diesel cycle:

$$\bar{T}_{heating} = \frac{h_3 - h_2}{s_3 - s_2} = \frac{(1709.50 - 269.03) \text{ kJ/kg}}{(8.11 - 6.84) \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}} = 1136.01 \text{ K}$$

De equivalente thermodynamische temperatuur van het verwarmingsproces van de Diesel cyclus is lager, daarom zijn de exergie verliezen die met het verwarmingsproces van de Otto cyclus gepaard gaat lager dan die van de Diesel cyclus.