Uitwerkingen I.1

Opgave I.1.1d

Zij $V = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Vind een eigenschap P zó dat elke van de volgende verzamelingen is te schrijven in de vorm $\big\{x \in V : P(x)\big\}$ en bewijs dat deze twee verzamelingen aan elkaar gelijk zijn.
(d) $D = \{-2, 0, 2\}$.

Uitwerking:

Neem als eigenschap $P(x)$: $x/2 \in \mathbb{Z}$. Dan geldt

$$D = \{x \in V : P(x)\}.$$

Bewijs: Aangezien $\{x \in V : P(x)\} \subseteq V$ kunnen we $\{x \in V : P(x)\}$ bepalen door voor elk element V te controleren of het een element van $\{x \in V : P(x)\}$ is. Er geldt $-3 \notin \{x \in V : P(x)\}$ want $-3/2 \notin \mathbb{Z}$. Er geldt $-2 \in \{x \in V : P(x)\}$ want $-2/2 = -1 \in \mathbb{Z}$. Er geldt $-1 \notin \{x \in V : P(x)\}$ want $-1/2 \notin \mathbb{Z}$. Er geldt $0 \in \{x \in V : P(x)\}$ want $0/2 = 0 \in \mathbb{Z}$. Er geldt $1 \notin \{x \in V : P(x)\}$ want $1/2 \notin \mathbb{Z}$. Er geldt $2 \in \{x \in V : P(x)\}$ want $2/2 = 1 \in \mathbb{Z}$. Er geldt $3 \notin \{x \in V : P(x)\}$ want $3/2 \notin \mathbb{Z}$. Er volgt dat $\{x \in V : P(x)\} = \{-2, 0, 2\} = D$.

Opgave I.1.4.
Laat A de verzameling van alle even natuurlijke getallen zijn, B de verzameling van alle natuurlijke getallen die deelbaar door 3 zijn en C de verzameling van alle natuurlijke getallen die deelbaar door 6 zijn. Bewijs of weerleg:

(a) $A \subseteq B$;
(b) $A \subseteq C$;
(c) $B \subseteq C$;
(d) $B \subseteq A$;
(e) $C \subseteq A$;
(f) $C \subseteq B$.

Uitwerking:
Er geldt: $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{3n : n \in \mathbb{N}\}$ en $C = \{6n : n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Dit is niet waar: $2 \in A$ maar $2 \notin B$.
(b) Dit is niet waar: $2 \in A$ maar $2 \notin C$.
(c) Dit is niet waar: $3 \in B$ maar $3 \notin C$.
(d) Dit is niet waar: $3 \in B$ maar $3 \notin A$.
(e) Dit is waar. Immers, zij $x \in C$ willekeurig, dan is er een $k \in \mathbb{N}$ met $x = 6k$; dan geldt ook $x = 2 \cdot (3k)$ en $3k \in \mathbb{N}$, dus $x \in A$.
(f) Dit is waar. Immers, zij $x \in C$ willekeurig, dan is er een $k \in \mathbb{N}$ met $x = 6k$; dan geldt ook $x = 3 \cdot (2k)$ en $2k \in \mathbb{N}$, dus $x \in B$.

Opgave I.1.7.
Geef de precieze voorwaarden op de verzamelingen A en B opdat $A \times B = B \times A$.

UITWERKING:

- Als $A = \emptyset$ of $B = \emptyset$ dan $A \times B = \emptyset$ en $B \times A = \emptyset$ dus $A \times B = B \times A$.
- Als $A = B$ dan $A \times B = B \times B$ en $B \times A = B \times B$ dus $A \times B = B \times A$..
- Als $A \neq \emptyset$ en $B \neq \emptyset$ en $A \neq B$ dan bestaat een $x \in A$ met $x \notin B$, of een $x \in B$ met $x \notin A$.

  Als er een $x \in A$ is met $x \notin B$, neem een $y \in B$ willekeurig. Dan is $(x, y) \in A \times B$ maar $(x, y) \notin B \times A$ omdat $x \notin B$ dus $A \times B \neq B \times A$.

  Het tweede geval, $x \in B$ met $x \notin A$, is analoog.

We kunnen concluderen: $A \times B = B \times A$ dan en slechts dan als $A = \emptyset$, $B = \emptyset$ of $A = B$.