I VERZAMELINGEN EN AFBEELDINGEN

Het begrip verzameling kennen we uit het dagelijks leven: een bibliotheek bevat een verzameling van boeken, een museum een verzameling van kunstvoorwerpen. We kennen verzamelingen ook uit de wiskunde: de verzameling van alle getallen, de verzameling van alle punten in het platte vlak, de verzameling van alle oplossingen van een vergelijking; in feite kunnen we zeggen dat de hele wiskunde opgebouwd is uit verzamelingen. Verzamelingen en hun eigenschappen zijn onderwerp van een breed wiskundig gebied — de verzamelingenleer.

Ongeveer honderd jaar geleden begonnen wiskundigen met een groot enthousiasme verzamelingen overal te gebruiken: het was heel handig elementen die een bepaalde eigenschap hadden als een geheel, een verzameling, te beschouwen. Maar heel snel ontstonden problemen: sommige groepen elementen leidden tot tegenspraken: men stuitte op paradoxen. Blijkbaar kunnen niet alle eigenschappen gebruikt worden om nieuwe verzamelingen te vormen.

Paradoxen

We zullen twee van die tegenspraken bekijken.

I.0.1 Voorbeeld. Paradox van Russell In een dorp woont kapper Hans die alléén die mannen uit het dorp scheert die zichzelf niet scheren. Wie scheert kapper Hans?

Het is duidelijk dat er twee mogelijkheden zijn: kapper Hans scheert zichzelf of hij scheert zichzelf niet. Als hij zichzelf scheert dan scheert de kapper hem niet, maar hij zelf is de kapper, dus hij kan zichzelf niet scheren. Aan de andere kant, als hij zichzelf niet scheert dan moet hij, de kapper, zichzelf toch scheren. We zien dat geen van de mogelijkheden mogelijk is, we krijgen een paradox.

I.0.2 Voorbeeld. Paradox van Berry Een van de basiseigenschappen van natuurlijke getallen is dat elke niet-lege verzameling natuurlijke getallen een kleinste element bevat. Beschouw nu alle natuurlijke getallen die beschreven kunnen worden in het Nederlands met behulp van ten hoogste honderd letters. Het Nederlandse alfabet heeft 26 letters, dus met behulp van honderd letters of minder kunnen we ten hoogste $26 + 26^2 + 26^3 + \cdots + 26^{100}$ getallen beschrijven (niet elke lettercombinatie is zinvol, en ook niet elke zinvolle combinatie van letters beschrijft een natuurlijk getal). Er zijn oneindig veel natuurlijke getallen, dus de verzameling getallen die niet met honderd letters of minder te beschrijven zijn is ook oneindig en dus zeker niet leeg. Deze verzameling moet dus een kleinste element bevatten. Zij n het kleinste natuurlijke getal dat niet met honderd letters of minder te beschrijven is. Maar we hebben n net met minder dan honderd letters beschreven!

Om paradoxen te vermijden moeten we voorzichtig zijn met wat we verzameling zullen noemen: niet elke collectie mag een verzameling zijn.

Er zijn vaste axioma's (grondregels) ingevoerd die het bestaan van sommige verzamelingen garanderen en beschrijven hoe we nieuwe verzamelingen uit oude kunnen maken, welke operaties met verzamelingen zijn toegestaan en welke eigenschappen ze hebben. Uitgaande van de axioma's en met behulp van logica kunnen we verdere eigenschappen van verzamelingen bewijzen. We zullen nu niet diep in de axioma's duiken, we zullen ons concentreren op het werken met verzamelingen. We zullen operaties met verzamelingen definiëren en de belangrijkste eigenschappen afleiden. Een volledige lijst van axioma's voor de verzamelingenleer is te vinden in Appendix X.1.

I.1 Notatie

Verzamelingen bevatten elementen; als A een verzameling is en x een element van A dan schrijven we[1]

$$x \in A.$$

Om aan te geven dat y *geen* element van A is schrijven we

$$y \notin A.$$

We gebruiken de notatie $\{1\}$ voor de verzameling die alleen het getal 1 bevat, $\{1, 2\}$ is een verzameling die twee elementen bevat, namelijk de getallen 1 en 2. De verzameling $\{a, b, c, d, e\}$ heeft minstens één en hoogstens vijf elementen: het hangt ervan af hoeveel gelijkheden er gelden tussen de niet gespecificeerde elementen a, b, c, d, e. De verzameling die geen elementen bevat heet de *lege verzameling* en wordt genoteerd als $\varnothing$.

Elementen van een verzameling kunnen ook verzamelingen zijn, bijvoorbeeld $A = \{3, \{2\}, \{4, 5\}\}$ heeft elementen 3, $\{2\}$ en $\{4, 5\}$. Er geldt dus $3 \in A$ maar $2 \notin A$; er geldt echter $\{2\} \in A$.

In de wiskunde zijn verzamelingen die getallen als elementen bevatten van groot belang. We gebruiken de letter $\mathbb{N}$ voor de verzameling van alle natuurlijke getallen: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,[2] $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ voor de verzameling van alle gehele getallen, $\mathbb{Q}$ voor de verzameling van alle breuken $\frac{p}{q}$ met $p, q \in \mathbb{Z}$ en $q \neq 0$, $\mathbb{R}$ voor de verzameling van alle reële getallen en $\mathbb{C}$ voor de verzameling van alle complexe getallen. Uiteindelijk zullen we deze getalsystemen (behalve $\mathbb{C}$) exact beschrijven door middel van gegevens en eigenschappen, en, uitgaand van $\mathbb{N}$, constructies schetsen van $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. Tot het zover is gaan we op een informele manier met deze getalsystemen om.

Als A een verzameling is dan wordt de verzameling van alle elementen uit A die een eigenschap E hebben als volgt genoteerd: $\{x \in A : E(x)\}$.

I.1.1 Voorbeeld.

(i) De verzameling $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ is de verzameling van alle positieve reële getallen. Deze verzameling is niet leeg want $5 \in \mathbb{R}_{>0}$. Daarentegen is $\{x \in \mathbb{R} : x > 5 \text{ en } x < 2\}$ leeg; er is geen reëel getal te vinden dat tegelijk groter dan 5 en kleiner dan 2 is.

(ii) De verzameling van alle reële oplossingen van de vergelijking $\sin(\pi x) = 0$ kunnen we kort als volgt schrijven: $A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(\pi x) = 0\}$. Analoog, de verzameling $B = \{x \in \mathbb{R} : \cos(\pi x/2) = 0\}$ is de verzameling van alle oplossingen van de vergelijking $\cos(\pi x/2) = 0$.

[1] Verzamelingen worden vaak, maar niet altijd, met behulp van hoofdletters genoteerd en hun elementen met behulp van kleine letters. We zullen ook verzamelingen tegenkomen waarvan de elementen weer verzamelingen zijn.

[2] Pas op, er zijn auteurs die $\mathbb{N}$ anders definiëren, namelijk $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Een goede alternatieve notatie voor $\mathbb{N}$ is $\mathbb{Z}_{\geq 0}$; deze maakt meteen duidelijk dat $0 \in \mathbb{N}$.

I.1.2 Definitie.

(i) Twee verzamelingen zijn *aan elkaar gelijk* als ze dezelfde elementen hebben, dat wil zeggen, $A = B$ als ieder element van A element van B is, en ieder element van B element van A.

(ii) Als elk element van A element van B is zeggen we dat A een *deelverzameling* van B is.

Notatie:[3] $A \subseteq B$.

Hieruit volgt dat $A = B$ dan en slechts dan als $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$.

I.1.3 Voorbeeld.

(i) De verzamelingen $A = \{1, 2, 3\}$ en $B = \{3, 3, 3, 2, 2, 1\}$ hebben dezelfde elementen en zijn dus aan elkaar gelijk. We kunnen schrijven: $A = B$.

(ii) Beschouw de verzamelingen A en B uit Voorbeeld I.1.1 (ii). Als x een geheel getal is dan is $\sin(\pi x) = 0$; dit betekent dat $\mathbb{Z} \subseteq A$. Aan de andere kant, als $\sin(\pi x) = 0$ dan moet x een geheel getal zijn; dit betekent dat $A \subseteq \mathbb{Z}$. We hebben bewezen $A = \mathbb{Z}$: de verzameling van alle oplossingen van de vergelijking $\sin(\pi x) = 0$ is de verzameling van alle gehele getallen.

(iii) Analoog kunnen we bewijzen dat alle oplossingen van $\cos(\pi x/2) = 0$ de verzameling van alle oneven gehele getallen is: $B = \big\{2k + 1 : k \in \mathbb{Z}\big\}$.[4]

(iv) De verzamelingen $A = \big\{0, \{1, 2, 3\}, 4\big\}$ en $B = \big\{0, 1, \{2, 3\}, 4\big\}$ zijn niet aan elkaar gelijk. Immers $1 \notin A$ en $1 \in B$.

Intervallen

I.1.4 Voorbeeld. Belangrijke deelverzamelingen van de reële rechte (de verzameling van alle reële getallen) zijn intervallen. We onderscheiden begrensde en onbegrensde intervallen.

(i) **Begrensde intervallen:** Voor $a, b \in \mathbb{R}$ is $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ een *open interval*, $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$ een *gesloten interval*, en $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$ en $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$ zijn *halfopen (of halfgesloten) intervallen*. Als nodig, dan kunnen we $(a, b]$ links-open en rechts-gesloten noemen, enzovoorts.

(ii) **Onbegrensde intervallen:** Zij $a \in \mathbb{R}$, dan zijn $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ en $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ open intervallen, en $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}$ en $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$ gesloten intervallen[5]. Ook de hele reële rechte kan beschouwd worden als een onbegrensd interval: $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, dat zowel open als gesloten is.

I.1.5 Voorbeeld.

(i) Er geldt $(0, 1) \subseteq (0, 1]$ want elk element van $(0, 1)$ is ook een element van $(0, 1]$, maar $(0, 1] \nsubseteq (0, 1)$ omdat 1 een element van $(0, 1]$ is maar niet van $(0, 1)$.

(ii) $\varnothing$ is een deelverzameling van elke verzameling, want voor iedere $x \in \varnothing$ geldt $x \in A$ (immers, er is geen $x \in \varnothing$, dus er is niets te controleren).

---

[3] Voor strikte inclusie wordt vaak "$\subsetneq$" gebruikt, en "$\subset$" is ook een gebruikelijke notatie voor "deelverzameling".

[4] Strikt genomen is deze notatie niet toegelaten in het door ons gebruikte systeem van axioma's voor verzamelingstheorie, maar de betekenis is duidelijk. Een correcte notatie zou zijn: $\{x \in \mathbb{Z} : \text{er is een } k \in \mathbb{Z} \text{ zodat } x = 2k + 1\}$.

[5] Het hier gebruikte symbool ∞ is *geen* element van $\mathbb{R}$, het staat slechts voor het begrip 'oneindig'.

(iii) Het open interval $(0, -1)$ is leeg, en gelijk aan het gesloten interval $[0, -1]$.

Cartesisch product

Het volgende begrip wordt vaak gebruikt.

I.1.6 Definitie. Het *Cartesisch product* van twee verzamelingen A en B is de verzameling geordende paren

$$A \times B = \big\{(a, b) : a \in A \text{ en } b \in B\big\}.^{6}$$

De volgorde van elementen van een geordend paar is belangrijk: als $a \neq b$ dan $(a, b) \neq (b, a)$. Twee geordende paren (a, b) en (a', b') zijn aan elkaar gelijk dan en slechts dan als $a = a'$ en $b = b'$.

I.1.7 Voorbeeld.

(i) Zij $A = \{0, 1, 2\}$ en $B = \{0, 3\}$. Het Cartesisch product van A en B is de volgende verzameling

$$A \times B = \big\{(0, 0), (0, 3), (1, 0), (1, 3), (2, 0), (2, 3)\big\}.$$

(ii) Zij $\mathbb{R}$ de reële rechte. Dan is $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de verzameling van alle punten in het platte vlak[7].

Opgaven

1. Zij $V = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Vind een eigenschap P zó dat elke van de volgende verzamelingen is te schrijven in de vorm $\big\{x \in V : P(x)\big\}$ en bewijs dat deze twee verzamelingen aan elkaar gelijk zijn.

(a) $A = \{1, 2, 3\}$;

(b) $B = \{0, 1, 2, 3\}$;

(c) $C = \{-2, -1\}$;

(d) $D = \{-2, 0, 2\}$;

(e) $E = \varnothing$.

2. Wat is het aantal elementen van de volgende verzamelingen:

(a) $A = \{0, 2, 4, \dots, 22\}$;

(b) $B = \big\{1, \{2\}, \{\{2\}\}\big\}$;

(c) $C = \big\{\{\{1\}\}\big\}$;

(d) $D = \{\varnothing\}$;

(e) $E = \big\{1, \{1, 2, 3, 4, 5\}\big\}$.

3. (a) Vind alle deelverzamelingen van $\{0, 1\}$.

(b) Vind alle deelverzamelingen van $\{0, 1, 2\}$.

(c) Vind alle deelverzamelingen van $\{0, 1, 2, 3\}$.

☆✍ (d) Zij A een *eindige* verzameling, d.w.z., een verzameling die maar eindig veel elementen bevat.[8] Vind een verband tussen het aantal elementen van A en het aantal deelverzamelingen van A, en bewijs je vermoeden.

[6] Helaas zijn onze notaties voor een geordend paar (a, b) van reële getallen en het open interval (a, b) gelijk. De lezer zal iedere keer de juiste keuze moeten maken op grond van de context.

[7] In plaats van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ schrijven we vaak $\mathbb{R}^2$.

[8] Voor de duidelijkheid: het reële interval $(0, 1)$ heet dan misschien wel eens een eindig interval, maar het is géén eindige verzameling.

✍ **4.** Laat A de verzameling van alle even natuurlijke getallen, B de verzameling van alle natuurlijke getallen die deelbaar door 3 zijn en C de verzameling van alle natuurlijke getallen die deelbaar door 6 zijn. Bewijs of weerleg:

(a) $A \subseteq B$;
(b) $A \subseteq C$;
(c) $B \subseteq C$;
(d) $B \subseteq A$;
(e) $C \subseteq A$;
(f) $C \subseteq B$.

5. Bewijs: voor elke verzameling A geldt dat $\varnothing \subseteq A$ en $A \subseteq A$.

6. Welke van de volgende verzamelingen zijn aan elkaar gelijk? Bewijs je bewering of geef een tegenvoorbeeld.

(a) $A = \{n \in \mathbb{Z} : |n| < 2\}$;
(b) $B = \{n \in \mathbb{Z} : n^3 = n\}$;
(c) $C = \{n \in \mathbb{Z} : n^2 \leqslant n\}$;
(d) $E = \{-1, 0, 1\}$.

✍ **7.** Geef de precieze voorwaarden op de verzamelingen A en B opdat $A \times B = B \times A$.

8. Voor elke verzameling A zij $\mathcal{P}(A)$ de verzameling van alle deelverzamelingen van A (deze heet de *machtsverzameling* van A). Geef de lijst van elementen van $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, waarbij $A = \{0, 1\}$ en $B = \{\varnothing\}$.