I.2 Operaties op verzamelingen

De basisoperaties op verzamelingen zijn als volgt gedefinieerd.

I.2.1 Definitie. Zij Ω een verzameling. Voor deelverzamelingen A en B van Ω definiëren we

(i) het *complement* van A in Ω door

$$\Omega \setminus A = \{x \in \Omega : x \notin A\}$$

(we schrijven vaak A^c als duidelijk is wat de verzameling Ω is);

(ii) de *vereniging* van A en B door

$$A \cup B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ of } x \in B\};$$

(iii) de *doorsnede* van A en B door

$$A \cap B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ en } x \in B\}.$$

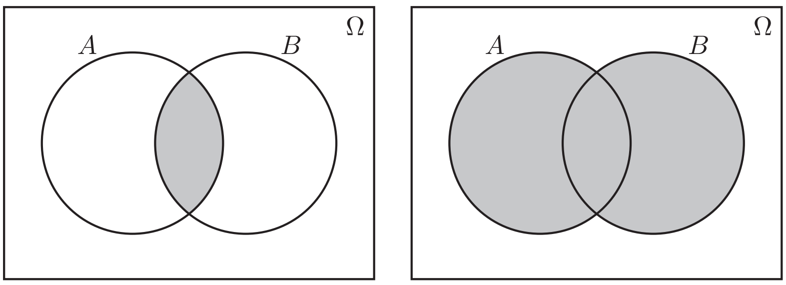
(iv) het *verschil* van A en B door

$$A \setminus B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ en } x \notin B\}.$$

I.2.2 Opmerking. In de bovenstaande definitie hangen $A \cup B$, $A \cap B$ en $A \backslash B$ niet af van de verzameling Ω waarin dit alles gebeurt. We zullen dan ook in deze gevallen deze Ω niet meer altijd noemen.

I.2.3 Voorbeeld. Beschouw weer de verzamelingen A en B uit Voorbeeld I.1.1(ii). Dan is $A \cap B$ de verzameling van alle getallen die oplossingen zijn van beide vergelijkingen $\sin(\pi x) = 0$ en $\cos(\pi x/2) = 0$, en $A \cup B$ is de verzameling van alle getallen die oplossingen zijn van tenminste één van die twee vergelijkingen. Omdat $A = \mathbb{Z}$ en $B = \{2k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$ is het niet moeilijk in te zien dat $A \cap B = B$ en $A \cup B = A$. ▬

Om doorsnede en vereniging van A en B te illustreren kunnen we Venn-diagrammen tekenen. In Figuur 1.1 zijn de doorsnede $A \cap B$ en de vereniging $A \cup B$ getekend. De Venn-diagrammen zijn ook handig om allerlei eigenschappen van de basisoperaties te vinden; zie bijvoorbeeld Opgaven I.2.1 en I.2.2.



Figuur 1.1: Doorsnede en vereniging van A en B

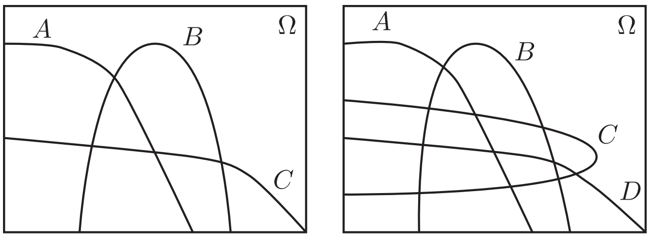
I.2.4 Definitie. Twee verzamelingen A en B heten *disjunct* als $A \cap B = \varnothing$.

I.2.5 Voorbeeld.

(i) De verzamelingen $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 9\}$ en $B = \{0, 1/2\}$ zijn disjunct: $A \cap B = \varnothing$ want alle elementen van A zijn reële getallen groter dan 9 en geen element van B is groter dan 9.

(ii) De verzamelingen $C = (-3, \pi)$ en $D = (1, 33]$ zijn niet disjunct; immers $2 \in C \cap D$ want $-3 < 2 < \pi$ en $1 < 2 \leqslant 33$. In feite bevat de doorsnede oneindig veel elementen: $C \cap D = (1, \pi)$.

In Figuur 1.2 zijn Venn-diagrammen voor drie respectievelijk vier deelverzamelingen van Ω getekend. Venn-diagrammen voor meer dan vier verzamelingen zijn lastig: het is niet makkelijk om in een overzichtelijke manier alle mogelijke doorsneden in één plaatje te krijgen.



Figuur 1.2: Venn-diagrammen voor drie en vier verzamelingen

Vereniging en doorsnede van oneindig veel verzamelingen

In de wiskunde onderzoeken we vaak oneindige objecten: er zijn oneindig veel natuurlijke getallen, oneindig veel breuken, oneindig veel punten in het platte vlak, oneindig veel lijnen, oneindig veel functies. Daarvoor is de taal van de verzamelingenleer ook handig.

We kunnen ook de doorsnede en de vereniging van *willekeurig* veel verzamelingen definiëren:

I.2.6 Definitie. Laat Ω een verzameling zijn. Laat L een verzameling zijn, en voor elke $\lambda \in L$, A_λ een deelverzameling van Ω. Dan:

$$\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda = \{x \in \Omega : \text{voor elke } \lambda \in L \text{ geldt } x \in A_\lambda\}$$

en

$$\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = \{x \in \Omega : \text{er is een } \lambda \in L \text{ met } x \in A_\lambda\}.$$

I.2.7 Voorbeeld. Beschouw de verzameling $\mathbb{N}$ van alle natuurlijke getallen. Voor elke $n \in \mathbb{N}$ zij $A_n = (0, 1/(n+1)]$. We bewijzen dat $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \varnothing$. Immers, neem aan dat $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \varnothing$. Dan is er een $x \in \mathbb{R}$ met $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Volgens Definitie I.2.6 ligt x in elk interval $(0, 1/(n+1)]$, dat wil zeggen, voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt $0 < x \leqslant 1/(n+1)$. We krijgen een tegenspraak[9]: voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n + 1 > 1/x$ geldt dat $1/(n+1) < x$.

Beschouw nu voor elke $n \in \mathbb{N}$ de verzameling $B_n = (0, n]$. We bewijzen nu dat $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = (0, \infty)$. Volgens Definitie I.1.2 moeten we laten zien dat $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \subseteq (0, \infty)$ en $(0, \infty) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. We bewijzen nu de eerste inclusie. Laat $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Volgens Definitie I.2.6 is er een $n \in \mathbb{N}$ met $x \in (0, n]$. Hieruit volgt dat $x \in (0, \infty)$. Nu de tweede inclusie. Laat $x \in (0, \infty)$. Neem dan een $n \in \mathbb{N}$ met $x < n$, dan $x \in (0, n]$ en bijgevolg $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

[9] Dit soort bewijs heet *bewijs uit het ongerijmde*. Het werkt als volgt: Om een bewering te bewijzen (in ons geval: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \varnothing$) kunnen we het tegengestelde veronderstellen ($\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \varnothing$) en laten zien dat dit tot een onjuiste bewering, een tegenspraak, leidt (er is een $x \in \mathbb{R}$ en er is een $n \in \mathbb{N}$ zó dat $x \leqslant 1/(n+1)$ èn $x > 1/(n+1)$).

Opgaven

✍ **1.** (**Wetten van de Morgan**) Zij Ω een verzameling. Bewijs dat voor alle deelverzamelingen A en B van Ω geldt

(a) $\Omega \setminus (A \cap B) = (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)$;

(b) $\Omega \setminus (A \cup B) = (\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B)$.

2. Zij Ω een verzameling. Formuleer en bewijs de Wetten van de Morgan

(a) voor drie deelverzamelingen van Ω;

(b) voor vier deelverzamelingen van Ω.

3. Bewijs dat voor alle verzamelingen A, B en C geldt

(a) $B \setminus (B \setminus A) = A \cap B$;

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

(c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

4. (a) Zij $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Vind $A \cap A$, $A \cup A$ en $A \setminus A$.

(b) Zij A een willekeurige verzameling. Vind en bewijs een algemene regel voor $A \cap A$, $A \cup A$ en $A \setminus A$.

5. Beschouw de verzamelingen $A = \{x \in \mathbb{N} : x \geqslant 15\}$ en $B = \{x \in \mathbb{N} : x \leqslant 20\}$. Beschrijf nu $\mathbb{N} \setminus A$, $\mathbb{N} \setminus B$, $A \cap B$ en $A \cup B$ met soortgelijke formules.

6. Zij $K = \{1, 2, 4\}$. Vind $\bigcup_{k \in K} A_k$ en $\bigcap_{k \in K} A_k$ als gegeven is:

(a) $A_k = \{k^2\}$;

(b) $A_k = [k-1, k+1]$;

(c) $A_k = (k, \infty)$.

☆✍ **7.** Beschouw voor elke $n \in \mathbb{N}$ de verzameling $A_n = \{x \in \mathbb{R} : 1/2^n \leqslant x < 2 + 1/2^n\}$.

(a) Vind $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

(b) Vind $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

8. Laat A, B en C deelverzamelingen zijn van Ω.

(a) Wat is het verband tussen $A \cup (B \setminus C)$ en $(A \cup B) \setminus (A \cup C)$?

(b) Wanneer geldt $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$?

9. Vereenvoudig de volgende uitdrukking met behulp van Venn-diagrammen:

$$(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B \cap D^c) \cup (A \cap B \cap C \cap D).$$