Uitwerkingen I.2

Opgave I.2.1a.

Zij Ω een verzameling. Bewijs dat voor alle deelverzamelingen A en B van Ω geldt (a) $\Omega \setminus (A \cap B) = (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)$;

Uitwerking: We laten eerst zien dat voor iedere $x \in \Omega \setminus (A \cap B)$ geldt dat ook $x \in (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)$. Stel dus $x \in \Omega \setminus (A \cap B)$. Er zijn twee mogelijkheden: ofwel $x \notin A$ of $x \in A$. In het eerste geval geldt $x \in \Omega \setminus A$ en dus ook $x \in (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)$. In het tweede geval moet gelden $x \notin B$ (gezien onze aanname dat $x \in \Omega \setminus (A \cap B)$). Dus $x \in \Omega \setminus B$ en dan ook weer $x \in (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)$.

Nu laten omgekeerd zien dat als $x \in (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)$ dan ook $x \in \Omega \setminus (A \cap B)$. Laat $x \in (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)$. We weten dat $x \in \Omega \setminus A$ of $x \in \Omega \setminus B$. In het eerste geval geldt dat $x \notin A$ en dus ook $x \notin A \cap B$, dus $x \in \Omega \setminus (A \cap B)$. Het geval $x \in \Omega \setminus B$ gaat net zo.

Opgave I.2.2a.

Zij Ω een verzameling. Formuleer en bewijs de Wetten van de Morgan voor drie deelverzamelingen van Ω;

Uitwerking:

De wetten van de Morgan voor 3 verzamelingen zijn:

$$\Omega \setminus (A \cap B \cap C) = (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B) \cup (\Omega \setminus C).$$
$$\Omega \setminus (A \cup B \cup C) = (\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B) \cap (\Omega \setminus C).$$

We bewijzen de eerste: Dit lijkt lastiger dan het is. We maken twee keer gebruik van opgave 1a. Noem $D = B \cap C$. Dan geldt wegens 1a:

$$\Omega \setminus (A \cap B \cap C) = \Omega \setminus (A \cap D) = (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus D).$$

Wegens 1a geldt ook:

$$\Omega \setminus D = \Omega \setminus (B \cap C) = (\Omega \setminus B) \cup (\Omega \setminus C).$$

Dus

$$\Omega \setminus (A \cap B \cap C) = (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus D) = (\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B) \cap (\Omega \setminus C).$$

Opgave I.2.3b.

(b) Bewijs dat voor alle verzamelingen A, B en C geldt $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

Uitwerking:

We bewijzen eerst $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Kies $x \in A \cap (B \cup C)$. Dan geldt $x \in A$ en $x \in B \cup C$. Er zijn 2 mogelijkheden. (i) $x \in B$ of (ii) $x \notin B$.

Geval (i) $x \in B$: We weten ook dat $x \in A$, dus $x \in A \cap B$. Dus ook $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Geval (ii) $x \notin B$: Aangezien ook geldt $x \in B \cup C$ weten we dat $x \in C$. Omdat $x \in A$ geldt volgt $x \in A \cap C$. Dus ook $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Vervolgens bewijzen we de andere inclusie $A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Kies $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Er zijn 2 mogelijkheden (i) $x \in (A \cap B)$ of (ii) $x \notin (A \cap B)$.

Geval (i) $x \in (A \cap B)$. Dan geldt $x \in A$ en $x \in B$. Hieruit volgt $x \in A$ en $x \in B \cup C$. Dus ook $A \cap (B \cup C)$.
Geval (ii) $x \notin (A \cap B)$. Omdat ook geldt $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, volgt dat $x \in A \cap C$. Dan geldt $x \in A$ en $x \in C$. Hieruit volgt $x \in A$ en $x \in B \cup C$. Dus ook $A \cap (B \cup C)$.

Opgave I.2.6b.
Zij $K = \{1, 2, 4\}$. Vind $\bigcup_{n \in K} A_n$ en $\bigcap_{k \in K} A_k$ en illustreer ze ook met behulp van Venn-diagrammen als gegeven is:
(b) $A_k = [k - 1, k + 1]$.

UITWERKING:
Merk eerst op dat $A_1 = [1 - 1, 1 + 1] = [0, 2]$, $A_2 = [2 - 1, 2 + 1] = [1, 3]$ en $A_4 = [4 - 1, 4 + 1] = [3, 5]$.
Dan geldt

- $A_1 \cap A_2 \cap A_4 = \emptyset$ want $A_2 \cap A_4 = \{3\}$ en $3 \notin [0, 2]$,
- $A_1 \cup A_2 \cup A_4 \subseteq [0, 5]$ want als $x \in A_1 \cup A_2 \cup A_4$ dan $0 \leq x \leq 2$ of $1 \leq x \leq 3$ of $3 \leq x \leq 5$ en dus $0 \leq x \leq 5$, en $[0, 5] \subseteq A_1 \cup A_2 \cup A_4$ want als $x \in [0, 5]$ dan $0 \leq x \leq 2$ of $1 \leq x \leq 3$ of $3 \leq x \leq 5$.

Opgave I.2.9.
Vereenvoudig de volgende uitdrukking met behulp van Venn-diagrammen:

$$(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B \cap D^c) \cup (A \cap B \cap C \cap D).$$

UITWERKING:
Neem Ω een verzameling zó dat $A \cup B \cup C \cup D$ een deelverzameling van Ω is. In plaatje-I-2-9.jpg is het Venn-diagram van A, B, C en D getekend. De verzameling $A \cap B \cap C^c$ is groen, $A \cap B \cap D^c$ is rood en $A \cap B \cap C \cap D$ is blauw.
Uit het Venn-diagram is te zien dat de vereniging gelijk is aan $A \cap B$.
