I.3 Functies

Iedereen is ongetwijfeld in veel situaties het begrip *functie* tegengekomen; vaak als een voorschrift dat aan elk getal een ander getal toevoegt, bijvoorbeeld de functie $f(x) = x^2$ die aan elk getal zijn kwadraat toevoegt. Er zijn echter veel meer mogelijkheden, we hoeven ons niet tot getallen te beperken: het voorschrift dat aan elke auto zijn kenteken toevoegt, het voorschrift dat aan elke persoon zijn geboortedatum toevoegt, of de kleur van zijn ogen zijn ook functies. Een functie kan gegeven worden door een formule (bijvoorbeeld $f(x) = x^2$), maar ook als een grafiek (bijvoorbeeld het verloop van de koers van aandelen in de tijd), of een tabel (bijvoorbeeld tentamencijfers van studenten die aan een tentamen hebben plaatsgenomen).

Om algemene eigenschappen van functies af te leiden en ze te kunnen gebruiken moeten we eerst afspreken welke voorschriften functies definiëren, en ook wat een functie precies is, zodat we bijvoorbeeld over gelijkheid kunnen praten. Informeel gesproken is een functie van A naar B een voorschrift dat aan *elk* element van A *precies één* element van B toevoegt. Een formele definitie gaat met behulp van Cartesisch product van A en B.

I.3.1 Definitie. Een *functie*[10] van A naar B is een tripel (A, B, f) met f een deelverzameling van $A \times B$ met de volgende eigenschap:

> voor iedere $a \in A$ bestaat er precies één $b \in B$ zodanig dat $(a, b) \in f$; deze b noteren we als $f(a)$.

Notatie: $f\colon A \to B$, en $a \mapsto f(a)$.

De verzameling A heet het *domein* en B het *codomein*[11] van f. De verzameling van alle geordende paren $(a, b) \in f$ heet de *grafiek* van f. In plaats van '$(a, b) \in f$' schrijven we vaak '$f(a) = b$'. Als $(a, b) \in f$ dan noemen we b het *beeld* van a onder f en a een *origineel* van b onder f. Merk op dat volgens deze definitie een functie gegeven wordt door haar domein, haar codomein en haar grafiek. Voor twee afbeeldingen $f\colon A \to B$ en $g\colon C \to D$ geldt dus dat $f = g$ precies dan als geldt: $A = C$, en $B = D$, en voor alle $a \in A$ geldt $f(a) = g(a)$.

I.3.2 Voorbeeld. De afbeeldingen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ en $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^2$ zijn dus gelijk, ook al zijn ze gegeven door verschillende formules.

I.3.3 Voorbeeld. Laat A de verzameling zijn van alle studenten van TU Delft. Dan hebben we functies $f\colon A \to \mathbb{N}$ en $g\colon A \to \mathbb{R}$ die elk element van A naar hun studienummer sturen. Deze functies zijn niet gelijk, want de codomeinen zijn verschillend.

I.3.4 Opmerking. Volgens de definitie van een functie heeft elk element van het domein precies één beeld. Een element van het codomein kan echter géén origineel hebben, of één of meerdere originelen hebben.

Beschouw bijvoorbeeld $f\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ gegeven door $f(x) = \sin(\pi x)$. Voor elke $x \in \mathbb{R}$ is de waarde van x onder f uniek bepaald, maar het getal $0 \in [-1, 1]$ heeft oneindig veel originelen: voor elke $x \in \mathbb{Z}$ geldt $f(x) = 0$.

I.3.5 Definitie. Laat A en B twee verzamelingen zijn en zij $f\colon A \to B$.

[10] Functies worden vaak ook *afbeeldingen* genoemd.

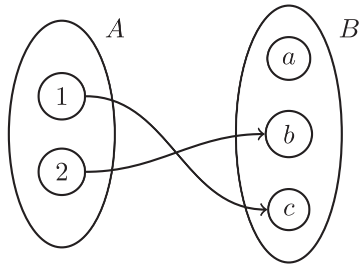
[11] Voor domein en codomein worden ook wel de namen bron(verzameling) en doel(verzameling) gebruikt.

(i) f heet *injectief* als voor alle $a_1 \in A$ en $a_2 \in A$ met $f(a_1) = f(a_2)$ geldt dat $a_1 = a_2$. (Met andere woorden, verschillende elementen van A moeten verschillende beelden hebben.)
(ii) f heet *surjectief* als voor elke $b \in B$ er een $a \in A$ bestaat met $f(a) = b$. (Met andere woorden, als de verzameling van beelden de hele verzameling B is.)
(iii) f heet *bijectief* als f injectief en surjectief is. (Met andere woorden, als er voor iedere $b \in B$ er precies één $a \in A$ is met $f(a) = b$.)
(iv) Het *beeld* van f is de verzameling van $b \in B$ waarvoor er een $a \in A$ is met $b = f(a)$. Het is een deelverzameling van B. Notaties: $f[A]$ of $\{f(a) : a \in A\}$ of $\{b \in B :$ er bestaat een $a \in A$ met $b = f(a)\}$.

I.3.6 Opmerking. Voor A en B verzamelingen, en $f\colon A \to B$ geldt dus dat f surjectief is precies dan als $f[A] = B$.

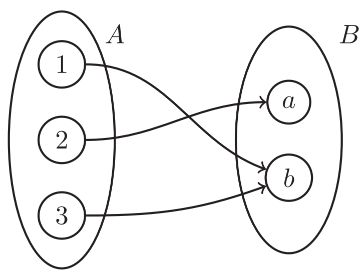
Als A en B eindig zijn dan is het makkelijk functies van A naar B grafisch weer te geven: zie de volgende voorbeelden.

I.3.7 Voorbeeld. Zij $A = \{1, 2\}$ en $B = \{a, b, c\}$ met a, b en c verschillend. De functie $f\colon A \to B$, gedefinieerd door $f(1) = c$ en $f(2) = b$, is injectief want verschillende elementen van A hebben verschillende beelden, maar niet surjectief omdat $a \in B$ geen beeld is van een element van A (zie Figuur 1.3).

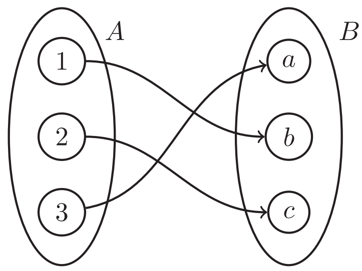


Figuur 1.3: Een injectieve, niet surjectieve functie $f\colon A \to B$

I.3.8 Voorbeeld. Zij $A = \{1, 2, 3\}$ en $B = \{a, b\}$ met a en b verschillend. De functie $f\colon A \to B$, gedefinieerd door $f(1) = b$, $f(2) = a$ en $f(3) = b$, is surjectief want elk element van B is een beeld van een element van A, maar niet injectief omdat de elementen 1 en 3 verschillend zijn en toch hetzelfde beeld hebben (zie Figuur 1.4).



Figuur 1.4: Een surjectieve, niet injectieve functie $f\colon A \to B$

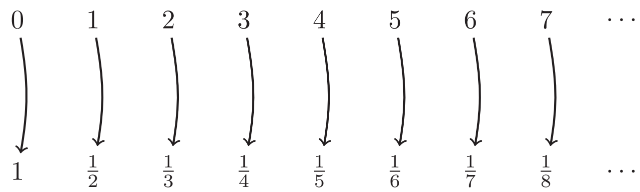


Figuur 1.5: Een bijectieve functie $f\colon A \to B$

I.3.9 Voorbeeld. Zij $A = \{1, 2, 3\}$ en $B = \{a, b, c\}$ met a, b en c verschillend. De functie $f\colon A \to B$, gedefinieerd door $f(1) = b$, $f(2) = c$ en $f(3) = a$, is surjectief en injectief (zie Figuur 1.5).

Een functie $a\colon \mathbb{N} \to B$ noemen we soms ook een *rij* in B. We schrijven dan vaak a_n in plaats van $a(n)$; een gebruikelijke notatie is $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (merk wel op dat we dan eigenlijk het codomein niet meer noemen, er is dus al enige mate van slordigheid).

I.3.10 Voorbeeld. De functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(n) = 1/(n+1)$ is dan de reële rij $(1/(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$. Deze functie is injectief (als $n \neq m$ dan $1/(n+1) \neq 1/(m+1)$), maar niet surjectief omdat (bijvoorbeeld) het getal 0 uit het codomein van f geen origineel heeft (er is geen natuurlijk getal n met $1/(n+1) = 0$).



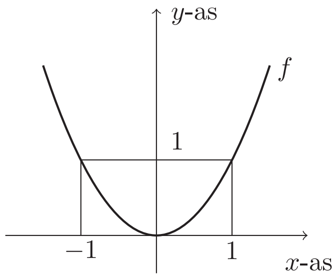
Figuur 1.6: De rij $(1/(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ als een functie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Laat $I \subseteq \mathbb{R}$ een interval zijn, en $f\colon I \to \mathbb{R}$. Om f grafisch weer te geven tekenen we meestal de grafiek als deelverzameling van $I \times \mathbb{R}$: zoals uit de definitie volgt is de grafiek de verzameling van alle punten van de vorm $(x, f(x))$ met $x \in I$.

I.3.11 Voorbeeld. De functie $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ gegeven door $f(x) = x^2$ is niet injectief: de punten -1 en 1 horen tot het domein van f, er geldt $-1 \neq 1$ maar $f(-1) = (-1)^2 = 1^2 = f(1)$ (zie Figuur 1.7). Zij is wel surjectief: voor elke $y \in [0, \infty)$ is er een $x \in \mathbb{R}$ met $f(x) = y$; neem bijvoorbeeld $x = \sqrt{y}$.

Door het domein of het codomein van een functie te veranderen krijgen we een *nieuwe* functie die geheel andere eigenschappen kan hebben. Bijvoorbeeld, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $g(x) = x^2$ is niet surjectief, en $h\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ gegeven door $h(x) = x^2$ is injectief en surjectief.

I.3.12 Voorbeeld. Er bestaat geen functie van $\{0, 1, 2, 3\}$ naar $\mathbb{N}$ die surjectief is. Immers, zij $f\colon \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{N}$ een afbeelding. De verzameling $\mathbb{N}$ is oneindig en dus is $X = \mathbb{N} \setminus \big\{f(0), f(1), f(2), f(3)\big\}$ niet leeg (X is zelfs oneindig). Kies een $b \in X$, dan heeft b geen origineel onder f.



Figuur 1.7: Grafiek van de functie $f(x) = x^2$

Samenstelling van functies

Een van de mooie eigenschappen van bijectieve functies is dat ze een inverse hebben. We zullen later zien dat als f bepaalde 'mooie' eigenschappen heeft (bijvoorbeeld continu is) deze eigenschappen door de inverse van f geërfd worden. Het volgende begrip is essentieel voor het definiëren van inverse functies, maar zeker nog belangrijker op zichzelf.

I.3.13 Definitie. Laat $f\colon A \to B$ en $g\colon B \to C$ twee functies zijn. De *samenstelling* van f en g is de functie $g \circ f\colon A \to C$ gedefinieerd door

$$(g \circ f)(a) = g\big(f(a)\big).$$

We lezen $g \circ f$ als "g na f".

I.3.14 Voorbeeld. De functie $f\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ is gegeven door $f(x) = \sin x$, en de functie $g\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ door $g(x) = x^2$. Dan is $f \circ g\colon [-1, 1] \to [-1, 1]$ de functie gedefinieerd door $(f \circ g)(x) = \sin(x^2)$, en $g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door $(g \circ f)(x) = (\sin x)^2$.

Als $f\colon A \to B$ en $g\colon B \to A$ functies zijn die samengesteld kunnen worden tot $g \circ f$ en $f \circ g$ geldt niet altijd dat $f \circ g = g \circ f$. Als $A \neq B$ dan kan $f \circ g$ al zeker niet gelijk zijn aan $g \circ f$, want de domeinen verschillen.

I.3.15 Stelling. De samenstelling van functies is associatief, dat wil zeggen,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

voor alle $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ en $h\colon C \to D$.

Bewijs. Neem aan $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ en $h\colon C \to D$ drie willekeurige functies zijn. De identiteit volgt uit het feit dat voor elke $a \in A$ geldt

$$\big(h \circ (g \circ f)\big)(a) = h\big((g \circ f)(a)\big) = h\big(g(f(a))\big)$$

en

$$\big((h \circ g) \circ f\big)(a) = (h \circ g)\big(f(a)\big) = h\big(g(f(a))\big).$$

∎

I.3.16 Definitie. Voor A een verzameling definiëren we de functie $\mathrm{id}_A\colon A \to A$, gegeven door $a \mapsto a$. Deze functie heet de *identieke functie* van A.

I.3.17 Opmerking. Als A en B verzamelingen zijn, en $f\colon A \to B$, dan geldt $f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f$.

Inverse functies

Zij $f\colon A \to B$ een bijectie. We definiëren in $B \times A$ de volgende deelverzameling

$$g = \{(b,a) \in B \times A \colon (a,b) \in f\}\,.$$

Merk op dat g een functie is van B naar A. Immers: omdat f surjectief is, is er voor iedere $b \in B$ een $a \in A$ zodat $(b,a) \in g$, en omdat f injectief is, is deze a uniek.

I.3.18 Definitie. Zij $f\colon A \to B$ een bijectie. De *inverse* van f is de functie $g = \{(b,a) \in B \times A \colon (a,b) \in f\}$.

De inverse functie $f\colon A \to B$ is de unieke functie $g\colon B \to A$ zodat voor alle $a \in A$ en $b \in B$ geldt

$$g(b) = a \qquad \text{dan en slechts dan als} \qquad f(a) = b.$$

Een functie kan niet meer dan één inverse hebben, zie Opgave I.3.14. We gebruiken als notatie: $g = f^{-1}$.

I.3.19 Lemma. Zij $f\colon A \to B$ een bijectie. De inverse f^{-1} is ook een bijectie en er geldt: $(f^{-1})^{-1} = f$.

Bewijs. Opgave I.3.16. ∎

I.3.20 Voorbeeld. De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = 2 - 3x$ is bijectief (ga zelf na dat f injectief en surjectief is). Om haar inverse te vinden beschouw een willekeurige $y \in \mathbb{R}$. Er geldt, voor alle $x \in \mathbb{R}$,

$$2 - 3x = y \qquad \text{dan en slechts dan als} \qquad x = \frac{2-y}{3}.$$

De inverse $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is dus gegeven door het voorschrift[12] $f^{-1}(x) = (2-x)/3$.

I.3.21 Definitie. Laat $f\colon A \to B$ een afbeelding zijn, en C een deelverzameling van B. Dan noemen we de verzameling $\{a \in A : f(a) \in C\}$ het *inverse beeld* van C onder f. Deze deelverzameling van A noteren we ook als $f^{-1}(C)$.

Merk op dat $f^{-1}(C)$ bestaat ook als f geen inverse heeft.

I.3.22 Voorbeeld. Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x^2$. Dan geldt $f^{-1}(\{-1\}) = \varnothing$, $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$ en $f^{-1}([0,1]) = [-1, 1]$.

Opgaven

✍ **1.** Laat $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door $f(x) = (1-x)/(1+x)$. Vind $f(0)$ en voor alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ vind $f(1/x)$ en $1/f(x)$.

✍ **2.** (a) Laat $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie zijn en neem aan dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt $f(x+1) = x^2 - 5x + 1$. Vind $f(x)$.

(b) Laat $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ een functie zijn en neem aan dat voor alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ geldt $f(1/x) = x + \sqrt{1 + x^2}$. Vind $f(x)$.

3. Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \sin(x^2)$; vind alle originelen van 0, -1 en π.

4. Hieronder staan vier tweetallen functievoorschriften. Geef van elk tweetal aan of beide voorschriften dezelfde functie beschrijven, of niet.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ en
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}, x \mapsto x^2$.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x+1)^2$ en
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x(\frac{x}{2} + 1) + 1$.

(c) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ en
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$.

(d) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$ en
$g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1}$.

5. (a) Laat $A = \{1, 2\}$ en $B = \{1, 2, 3\}$. Hoeveel afbeeldingen $A \to B$ zijn er?

(b) Laat B een verzameling zijn. Hoeveel functies $f : \varnothing \to B$ zijn er?

(c) Laat A een verzameling zijn. Hoeveel functies $f : A \to \varnothing$ zijn er?

6. Geef voorbeelden van eindige verzamelingen A en B en een functie
$f\colon A \to B$ die

(a) bijectief is,

(b) surjectief maar niet injectief is,

(c) injectief maar niet surjectief is,

(d) niet surjectief en niet injectief is.

Bewijs in elk van de onderdelen dat je voorbeeld de gewenste eigenschappen heeft.

7. Geef voorbeelden van oneindige verzamelingen A en B en een functie
$f\colon A \to B$ die

(a) bijectief is,

(b) surjectief maar niet injectief is,

(c) injectief maar niet surjectief is,

(d) niet surjectief en niet injectief is.

Bewijs in elk van de onderdelen dat je voorbeeld de gewenste eigenschappen heeft.

8. Zij A een eindige verzameling. Voor het aantal elementen van A gebruiken we de notatie $\#A$.
Neem aan dat A en B eindige verzamelingen zijn en zij $f : A \to B$.

(a) Laat zien dat als f injectief is dan geldt $\#A \leqslant \#B$.

(b) Laat zien dat als f surjectief is dan geldt $\#A \geqslant \#B$.

9. Laat $f\colon A \to B$ en $g\colon B \to C$ twee functies zijn. Bewijs of weerleg:

(a) Als $g \circ f$ injectief is dan is f injectief.

(b) Als $g \circ f$ injectief is dan is g injectief.

(c) Als $g \circ f$ surjectief is dan is f surjectief.

(d) Als $g \circ f$ surjectief is dan is g surjectief.

10. Bewijs of weerleg: samenstelling van functies is commutatief, dat wil zeggen, voor alle verzamelingen A en B, en voor alle $f\colon A \to B$ en $g\colon B \to A$ geldt $f \circ g = g \circ f$. Geldt deze bewering als $A = B$?

[12] Het maakt natuurlijk niets uit of we de variabele x of y noemen.

11. Bewijs dat elke van de volgende functies een inverse heeft en vind zijn voorschrift.

(a) $f\colon \{0,1,2\} \to \{3,5,15\}$ gegeven door $f(0)=3$, $f(1)=15$ en $f(2)=5$.

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = 4x+5$;

(c) $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gegeven door $f(x) = 1/x$.

12. Beschouw $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = (1-5x)/x$.

(a) Bewijs dat f injectief is.

✍ (b) Vind het beeld B van f. Laat zien dat de afbeelding $g\colon [1,\infty) \to B$ gedefinieerd door $x \mapsto f(x)$ bijectief is en bereken de inverse van g.

✍ **13.** Voor elke van de onderstaande injectieve functies $f\colon A \to \mathbb{R}$, bepaal het beeld B, en bepaal de afbeelding $g\colon B \to A$ zodat voor alle $a \in A$ geldt $g(f(a)) = a$.

(a) $A = \mathbb{R}$ en $f(x) = 7x-3$;

(b) $A = (-\infty, 0]$ en $f(x) = x^2$;

(c) $A = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ en $f(x) = (1-x)/(2+x)$;

(d) $A = [-1,0]$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

✍ **14.** Bewijs dat een bijectieve functie precies één inverse heeft.

15. Laat A en B verzamelingen zijn, en $f\colon A \to B$ en $g\colon B \to A$.

(a) Bewijs dat f en g inversen van elkaar zijn precies dan als $g \circ f = \mathrm{id}_A$ en $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

(b) Geef een voorbeeld waar $g \circ f = \mathrm{id}_A$ en $f \circ g \neq \mathrm{id}_B$.

16. Bewijs Lemma I.3.19.

17. Zij $f\colon A \to A$ een functie. Bewijs: als voor elke $a \in A$ geldt $f\big(f(a)\big) = a$ dan is f een bijectie en $f^{-1} = f$.

18. Laat $f : A \to B$ een bijectie zijn en $C \subseteq B$. Bewijs of weerleg: $f^{-1}(C) = f^{-1}[C]$. (Zie Definitie I.3.5(iv) en Definitie I.3.21.)

19. Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de afbeelding zijn gegeven door $f(x) = x^2$.

(a) Beschrijf de elementen van $f^{-1}(\mathbb{Z}) \cap \mathbb{Q}$.

(b) Bewijs of weerleg: $f^{-1}(\mathbb{Z}) \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.

20. Zij $f\colon A \to B$ een functie. Zij V_1 en V_2 deelverzamelingen van A. Toon aan

(a) $f[V_1 \cap V_2] \subseteq f[V_1] \cap f[V_2]$;

(b) Als f injectief is, dan geldt $f[V_1 \cap V_2] = f[V_1] \cap f[V_2]$.

✯ **21.** Formeel is een functie een deelverzameling van een Cartesisch product. Neem eens aan dat we $(a,b) \in f$ *niet* hadden afgekort met $b = f(a)$. Laat $f\colon A \to B$ en $g\colon B \to C$ functies zijn. Geef een definitie van $g \circ f$ in termen van geordende paren, dat wil zeggen, vul de volgende zin aan:
$(a,c) \in g \circ f$ dan en slechts dan als ....
en bewijs dat dit dezelfde afbeelding oplevert als Definitie I.3.13.
Bewijs, uitgaande van de voorgaande formulering, dat $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

22. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een bijectie. De grafieken van f en f^{-1} zijn deelverzamelingen van $\mathbb{R}^2$. Wat is het verband tussen deze deelverzamelingen?

23. Probeer eens de interactieve opgaven over inverse functies op de WIMS systeem (zoek onder ‘inverse’): `http://wims.math.leidenuniv.nl/wims/`