Uitwerkingen van I.3

Opgave I.3.8b.
Stel A en B zijn eindige verzamelingen, en $f : A \to B$ is surjectief. We bewijzen dat $\#A \geq \#B$. Hierbij betekenen $\#A$ en $\#B$ het aantal elementen van A en B, respektivelijk.

Definieer $n \in \mathbb{N}$ als $n = \#B$. Omdat B uit eindig veel elementen bestaat kunnen we schrijven $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, met $b_i \in B$ voor elke i. Merk op alle b_i zijn verschillend van elkaar. Dit volgt uit $\#B = n$. Omdat f surjectief is kunnen we voor iedere i een $a_i \in A$ vinden zó dat $f(a_i) = b_i$. Bewering: $a_i \neq a_j$ voor alle $i \neq j$. Inderdaad als $a_i = a_j$ voor een $i \neq j$, dan zou volgen $b_i = f(a_i) = f(a_j) = b_j$, en dat kan niet. We vinden $a_1, \ldots, a_n \in A$ met alle a_i verschillend van elkaar. Hieruit volgt dat $\#A \geq n = \#B$.

Opgave I.3.10.
Bewijs of weerleg: samenstelling van functies is commutatief, dat wil zeggen, voor alle verzamelingen A en B, en voor alle $f\colon A \to B$ en $g\colon B \to A$ geldt $f \circ g = g \circ f$. Geldt deze bewering als $A = B$?

Uitwerking:
Deze bewering is niet waar; we kunnen zelfs een tegenvoorbeeld vinden als $A = B$.

Beschouw $A = B = \mathbb{R}$ en $f(x) = 2x$ en $g(x) = x^3$. Dan is $f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^3) = 2x^3$ en $g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gegeven door $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x) = (2x)^3 = 8x^3$. Het is nu makkelijk te zien dat $f \circ g \neq g \circ f$: neem bijvoorbeeld $x = 1$, dan $f \circ g(1) = 2$ en $g \circ f(1) = 8$.

Opgave I.3.9ab.
Laat $f : A \to B$ en $g : B \to C$ functies zijn. Bewijs of weerleg:

(a) Als $g \circ f$ injectief is, dan is f injectief
(b) Als $g \circ f$ injectief is, dan is g injectief

(a) is waar. Neem aan dat $g \circ f$ injectief is. We tonen aan dat f injectief is. Kies $x, y \in A$ met $f(x) = f(y)$. Te bewijzen $x = y$. Aangezien $f(x) = f(y)$ geldt ook $g(f(x)) = g(f(y))$. Met de injectiviteit van $g \circ f$ volgt $x = y$.

(b) is niet waar. Neem $A = [0, 1]$, en $B = [-1, 1]$ en $C = [0, 1]$. Definieer $g : [-1, 1] \to [0, 1]$ als $g(x) = x^2$. Dan is g niet injectief want $g(-1) = g(1) = 1$. Definieer $f : [0, 1] \to [-1, 1]$ als $f(x) = x$. Dan geldt $g \circ f : [0, 1] \to [0, 1]$ wordt gegeven door $(g \circ f)(x) = x^2$. Deze functie is injectief. Inderdaad, als $x, y \in [0, 1]$ voldoen aan $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ dan geldt $x^2 = y^2$. Aangezien ook $x, y \in [0, 1]$ implicieert dit dat $x = y$.

Opgave I.3.11b.
Bewijs dat elke van de volgende functies een inverse heeft en vind zijn voorschrift.
(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = 4x + 5$.

Uitwerking:
Als $4x + 5 = 4y + 5$ dan $x = y$ en dus is f injectief.

Zij $y \in \mathbb{R}$ willekeurig, we zoeken een $x \in \mathbb{R}$ met $f(x) = y$. We losssen $4x + 5 = y$ op; we krijgen $x = \frac{1}{4}(y-5)$. Zo'n $x \in \mathbb{R}$ bestaat dus: $f(x) = 4\left(\frac{1}{4}(y-5)\right) + 5 = y$, dus f is ook surjectief.

Omdat f bijectief is bestaat de inverse $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en is deze gegeven door $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x-5)$.

Opgave I.3.16.
Stel $f : A \to B$ is een bijectie. We tonen aan dat $f^{-1} : B \to A$ een bijectie is.

Herinner uit definitie I.3.18 dat

$$\text{voor alle } a \in A \text{ en } b \in B \text{ geldt } f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b.$$

In het bijzonder geldt voor alle $a \in A$ en $b \in B$ dat $f^{-1}(f(a)) = a$ en $f(f^{-1}(b)) = b$.

- Surjectiviteit: Stel $a \in A$ is willekeurig. Definieer $b = f(a)$. Dan geldt $f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$
- Injectieviteit: Stel $b_1, b_2 \in B$ en $f^{-1}(b_1) = f^{-1}(b_2)$. Hieruit volgt[1]
$$b_1 = f(f^{-1}(b_1)) = f(f^{-1}(b_2)) = b_2.$$
- Ten slotte bewijzen we $(f^{-1})^{-1} = f$. Merk op $(f^{-1})^{-1}$ bestaat omdat f^{-1} bijectief is. Verder geldt $(f^{-1})^{-1} : A \to B$. Er geldt:
  (i) voor alle $a \in A$ en $b \in B$ geldt $f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$
  (ii) voor alle $a \in A$ en $b \in B$ geldt $(f^{-1})^{-1}(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$.
  Uit (i) en (ii) volgt dat voor alle $a \in A$ en $b \in B$: $(f^{-1})^{-1}(a) = b \Leftrightarrow f(a) = b$. Dit toont aan $(f^{-1})^{-1} = f$.

[1]Door f toepassen