I.4 Aftelbare en overaftelbare verzamelingen

Aftelbare verzamelingen

Stel we hebben twee verzamelingen A en B en we willen bepalen welke verzameling meer elementen bevat. Hoe kunnen we twee verschillende verzamelingen vergelijken? Als de verzamelingen eindig zijn (dat wil zeggen, als ze beide uit eindig veel elementen bestaan) dan is het geen groot probleem: tel de elementen van A, tel de elementen van B en vergelijk die twee natuurlijke getallen.

Maar wat moeten we doen als beide verzamelingen oneindig zijn? We kunnen de elementen niet meer tellen. Er is echter nog een methode om bij eindige verzamelingen te bepalen welke verzameling meer elementen bevat waarbij het tellen van het aantal elementen niet nodig is.

Neem aan dat je twee dozen hebt. In de eerste doos zijn moeren en in de tweede doos bevinden zich bouten. Je wilt bepalen of er meer bouten of meer moeren zijn. Het is niet noodzakelijk het aantal moeren en bouten te bepalen: je kunt ook telkens een bout en een moer pakken en deze op elkaar draaien. Als uiteindelijk de doos met de moeren leeg is terwijl er nog bouten over zijn weet je dat er meer bouten zijn dan moeren. En omgekeerd, zijn er moeren over dan heb je meer moeren dan bouten.

Dit idee kunnen we *wel* gebruiken om de grootte van oneindige verzamelingen te vergelijken: we proberen een correspondentie te vinden tussen telkens één element van de eerste en één element van de tweede verzameling.

Nu gaan we dit alles netjes wiskundig definiëren. We zullen definiëren wanneer twee verzamelingen even veel elementen hebben.

I.4.1 Definitie. Twee verzamelingen A en B heten *gelijkmachtig* als een bijectie $f\colon A \to B$ bestaat.

I.4.2 Voorbeeld. De verzamelingen $A = \{a, b, c, d\}$ met a, b, c, d verschillend en $B = \{1, 2, 3, 4\}$ zijn gelijkmachtig: een bijectie $f\colon A \to B$ is gedefinieerd door $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$ en $f(d) = 4$.

I.4.3 Voorbeeld.

(i) De intervallen $[0, 1]$ en $[0, 2]$ zijn gelijkmachtig: de afbeelding $f\colon [0, 1] \to [0, 2]$ gegeven door $f(x) = 2x$ is een bijectie.

(ii) Het interval $(-\pi/2, \pi/2)$ en de verzameling $\mathbb{R}$ zijn gelijkmachtig: de afbeelding $\tan\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ is een bijectie, en bijvoorbeeld ook de afbeelding $x \mapsto -1/(x + \pi/2) - 1/(x - \pi/2)$.

(iii) Het interval $(0, 1)$ en het interval $(1, \infty)$ zijn gelijkmachtig: de afbeelding $x \mapsto 1/x$ is een bijectie.

Met behulp van het begrip gelijkmachtig kunnen we een nette definitie van eindige verzameling geven.

I.4.4 Definitie. Zij A een verzameling.

(i) A heet *eindig* als een natuurlijk getal n bestaat zó dat $\{1, 2, \ldots, n\}$ en A gelijkmachtig zijn (voor $n = 0$ betekent dit dat $A = \varnothing$).

(ii) A heet *aftelbaar oneindig* als A en $\mathbb{N}$ gelijkmachtig zijn.

(iii) A heet *aftelbaar* als A eindig of aftelbaar oneindig is.

(iv) A heet *overaftelbaar* als A niet aftelbaar is.

Oneindige verzamelingen zijn dus aftelbaar als ze even veel elementen als $\mathbb{N}$ hebben. Het zou duidelijk moeten zijn dat $\mathbb{N}$ zelf aftelbaar is: de identieke afbeelding $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is een bijectie. Omdat $\mathbb{N}$ niet eindig is, is er tenminste één aftelbaar oneindige verzameling.

I.4.5 Voorbeeld. Intuïtief zijn er meer gehele getallen dan natuurlijke getallen maar toch is de verzameling $\mathbb{Z}$ aftelbaar: een bijectie van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{Z}$ is gedefinieerd bijvoorbeeld door

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is,} \\ -(n+1)/2 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Bewijs. We tonen eerst aan dat f injectief is. Zij $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ en neem aan dat $f(n_1) = f(n_2)$. Omdat $f(n) \geq 0$ dan en slechts dan als n even is, geldt dat n_1 en n_2 ofwel beide even ofwel beide oneven zijn. In het eerste geval hebben we $n_1/2 = n_2/2$, en dus $n_1 = n_2$, en in het tweede geval $-(n_1+1)/2 = -(n_2+1)/2$ waar ook uit volgt dat $n_1 = n_2$. In beide gevallen concluderen we dus dat $n_1 = n_2$, en er geldt dat f injectief is.

Nu gaan we bewijzen dat f surjectief is. Zij $m \in \mathbb{Z}$ willekeurig. Als $m \geq 0$ dan geldt dat $2m \in \mathbb{N}$ en $f(2m) = m$, en dus ligt m in het beeld van f. Als daarentegen $m < 0$ dan geldt dat $-1-2m \in \mathbb{N}$ en $f(-1-2m) = -(-1-2m+1)/2 = m$. In beide gevallen vinden we dat m in het beeld van f ligt. We concluderen dus dat f surjectief is.

Omdat de afbeelding f zowel injectief als surjectief is, is hij bijectief. ■

Ook de verzameling $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ is aftelbaar.

I.4.6 Stelling. De verzameling $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ is aftelbaar.

Bewijs. Om te laten zien dat $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aftelbaar is moeten we een bijectie vinden tussen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. We zullen met een plaatje aannemelijk maken dat zo een bijectie bestaat, zonder het bewijs in detail te geven.

Beschouw de functie $f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ waarbij $f(x, y)$ in de volgende tabel is weergegeven.

Bijvoorbeeld $f(2, 1) = 7$ en $f(4, 0) = 10$. Uit de constructie is het duidelijk dat f een bijectie is. ■

Met een gelijkaardig argument kan men bewijzen dat ook $\mathbb{Q}$ aftelbaar is. Zie opgave I.4.8.

Niet elke verzameling is aftelbaar. We zullen bewijzen dat de verzameling van alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ overaftelbaar is.

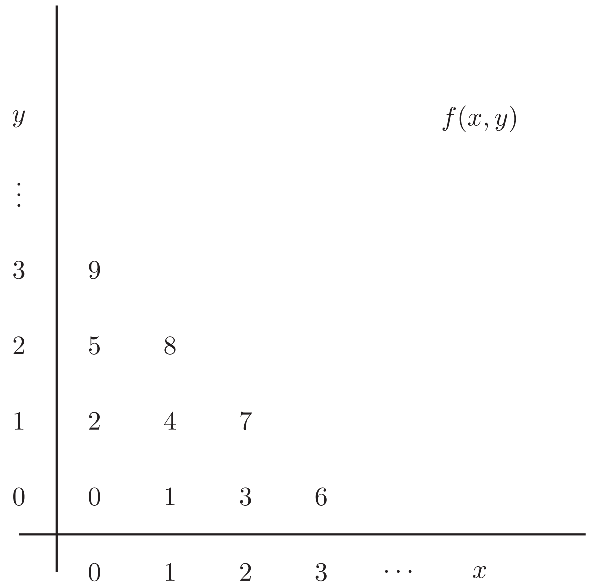
I.4.7 Definitie. Zij A een verzameling. De *machtsverzameling* van A is de verzameling van alle deelverzamelingen van A. Notatie: $\mathcal{P}(A)$.

I.4.8 Voorbeeld. $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. ■

I.4.9 Stelling (Cantor)**.** Zij A een verzameling. Er bestaat geen surjectieve afbeelding $f \colon A \to \mathcal{P}(A)$.

Met deze stelling kunnen we nu onmiddellijk een voorbeeld geven van een overaftelbare verzameling.

I.4.10 Gevolg. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is overaftelbaar.



Figuur 1.8: Grafische weergave van de functie $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Bewijs. We bewijzen dit *uit het ongerijmde*. Dat wil zeggen dat we aannemen dat de uitspraak niet waar is, en dan een tegenstrijdigheid afleiden.

Neem dus aan dat $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ aftelbaar is. Omdat $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ niet eindig is, betekent dit dat er een bijectie $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ is. Zo een bijectie is in het bijzonder surjectief, in tegenspraak met de stelling van Cantor. ■

Bewijs van Stelling I.4.9. Neem aan dat er een surjectie $f : A \to \mathcal{P}(A)$ bestaat. Beschouw nu de verzameling

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\}.$$

Aangezien $B \subseteq A$ geldt ook $B \in \mathcal{P}(A)$. Wegens de aanname dat f surjectief is, bestaat er een $x \in A$ met $f(x) = B$. Er zijn twee mogelijkheden: (i) $x \in B$ of (ii) $x \notin B$. Als (i) geldt dan geldt $x \in B$. Dus ook $x \in f(x)$, en met de definitie van B volgt $x \notin B$. Dus (i) geeft een tegenspraak. Als (ii) geldt dan weten we $x \notin B$ dus ook $x \notin f(x)$, en met de definitie van B volgt dat $x \in B$. Dus (ii) geeft ook een tegenspraak. Beide gevallen (i) en (ii) kunnen niet gelden, en dus vinden we een tegenspraak. ■

We zullen later ook bewijzen dat $\mathbb{R}$ overaftelbaar is, maar daarvoor moeten we uiteraard eerst een definitie van $\mathbb{R}$ zien!

Opgaven

1. Hoeveel verschillende bijecties kun je vinden tussen $A = \{a, b, c, d\}$ (met a, b, c, d verschillend) en $B = \{1, 2, 3, 4\}$?

2. Laat zien dat de intervallen $(-1, 1)$ en $(2, 5)$ gelijkmachtig zijn.

3. Laat zien dat $(0, 1)$ en $\mathbb{R}$ gelijkmachtig zijn.

4. Zij $2\mathbb{N}$ de verzameling van alle even natuurlijke getallen. Bewijs dat $2\mathbb{N}$ aftelbaar oneindig is.

5. Laat zien dat de intervallen $[0,1)$ en $(2,5]$ gelijkmachtig zijn.

6. Beschouw $A = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ en $B = \{3^n : n \in \mathbb{N}\}$. Laat zien dat $A \cup B$ aftelbaar is.

☆ **7.** Laat zien dat de afbeelding $f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{\geq 1}$ gegeven door $f(n,m) = 2^n(2m+1)$ een bijectie is.

☆ **8.** Bewijs dat $\mathbb{Q}$ aftelbaar is.

☆ **9.** Laat zien dat de afbeelding $f \colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeven door $f(n,m) = \frac{1}{2}(n+m)(n+m+1)+m$ een bijectie is.

10. Zij A een verzameling en $\mathcal{P}(A)$ zijn machtsverzameling. Geef een injectie $f \colon A \to \mathcal{P}(A)$.

11. Zij $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. Wat is $\mathcal{P}(A)$?

12. (a) Laat zien dat de vereniging van twee aftelbare verzamelingen aftelbaar is.
(b) Laat zien dat de vereniging van aftelbaar veel aftelbare verzamelingen aftelbaar is.
(c) Lees de wikipedia pagina ‘Hilbert’s paradox of the Grand Hotel’.

☆ **13.** Bewijs of weerleg:
(a) de intervallen $(0,1)$ en $[0,1)$ zijn gelijkmachtig.
(b) de intervallen $[0,1)$ en $[0,1]$ zijn gelijkmachtig.
(c) de intervallen $(0,1)$ en $[0,1]$ zijn gelijkmachtig.

14. Bewijs dat elke deelverzameling van een aftelbare verzameling aftelbaar is.