Uitwerkingen I.4

Opgave I.4.2.
Laat zien dat de intervallen $(-1, 1)$ en $(2, 5)$ gelijkmachtig zijn.

UITWERKING:
We proberen een lineaire functie $f\colon (-1,1) \to (2,5)$ te vinden. Een lineaire functie is gegeven door de formule $f(x) = ax + b$. We eisen, bovendien, dat $f(-1) = 2$ en $f(1) = 5$. Er geldt dus $f(-1) = -a + b = 2$ en $f(1) = a + b = 5$. We lossen dit stelsel op en de oplossing is $a = 3/2$ en $b = 7/2$.

We moeten nog bewijzen dat de functie $f\colon (-1,1) \to (2,5)$ gegeven door de formule $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$ bijectief is.

We bewijzen eerst dat f injectief is. Laat $x, y \in (-1, 1)$ met $f(x) = f(y)$ zijn. Dan volgt $\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} = \frac{3}{2}y + \frac{7}{2}$. Dus $\frac{3}{2}x = \frac{3}{2}y$ en hieruit volgt $x = y$. Conclusie f is injectief.

We bewijzen nu dat f surjectief is. Zij $y \in (2, 5)$, we zoeken een $x \in (-1, 1)$ zó dat $f(x) = y$. We lossen de volgende vergelijking op:

$$\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} = y.$$

De oplosssing is $x = \frac{1}{3}(2y - 7)$. We moeten nog nagaan dat de gevonden x de gewenste eigenschappen heeft.

Uit $y > 2$ volgt $x > \frac{1}{3}(2 \cdot 2 - 7) = -1$, en uit $y < 5$ volgt $x < \frac{1}{3}(2 \cdot 5 - 7) = 1$, dus inderdaad $x \in (-1, 1)$. Verder,

$$f(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{2y-7}{3}\right) + \frac{7}{2} = y - \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = y.$$

Hiermee is ook aangetoond dat f surjectief is.

We hebben bewezen dat een bijectie $f\colon (-1,1) \to (2,5)$ bestaat dus we kunnen concluderen dat de intervallen $(-1, 1)$ en $(2, 5)$ gelijkmachtig zijn.

Opgave I.4.6.
Beschouw $A = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ en $B = \{3^n : n \in \mathbb{N}\}$. Laat zien dat $A \cup B$ aftelbaar is.

UITWERKING:
Beschouw $f\colon \mathbb{N} \to A \cup B$ gegeven door

$$f(n) = \begin{cases} 2^{-n/2}, & \text{als } n \text{ even is;} \\ 3^{(n+1)/2}, & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

We moeten nu laten zien dat f een bijectie is.

We bewijzen eerst dat f injectief is. Neem aan dat $n, m \in \mathbb{N}$ en $f(n) = f(m)$. We bewijzen dat $n = m$. Aangezien $f(x) \leq 1$ als x even is, en $f(x) > 1$ als x oneven is, volgt uit $f(n) = f(m)$ dat n en m beide even of beide oneven zijn.

- Als n en m beide even zijn dan volgt uit $f(n) = f(m)$ dat $2^{-n/2} = 2^{-m/2}$. Hieruit zien we dat $-n/2 = -m/2$. Dus ook $n = m$.
- Als n en m beide oneven zijn dan volgt uit $f(n) = f(m)$ dat $3^{(n+1)/2} = 3^{(m+1)/2}$. Op dezelfde manier als eerder zien we dat hieruit volgt $n = m$.

We hebben aangetoond dat f injectief is.

We laten nu zien dat f surjectief is. Zij $y \in A \cup B$. Dan is $y \in A$ of $y \in B$. We zoeken een $k \in \mathbb{N}$ met $f(k) = y$.

- Als $y \in A$ dan bestaat een $n \in \mathbb{N}$ met $y = 2^{-n}$. Beschouw $k = 2n$ dan is $k \in \mathbb{N}$ even dus $f(k) = f(2n) = 2^{-2n/2} = 2^{-n} = y$.
- Als $y \in B \setminus A$ dan bestaat een $n \in \mathbb{N}$ met $y = 3^n$ en $n \geq 1$. Beschouw $k = 2n - 1$, dan is $k \in \mathbb{N}$ oneven dus $f(k) = f(2n-1) = 3^{(2n-1+1)/2} = 3^{2n/2} = 3^n = y$.

Hiermee hebben we ook bewezen dat f surjectief is.

We hebben een bijectie $f\colon \mathbb{N} \to A \cup B$ gevonden en dus we kunnen concluderen dat $A \cup B$ aftelbaar is.

Opgave I.4.6.

Laat zien dat $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{\geq 1}$ gegeven door $f(n, m) = 2^n(2m + 1)$ een bijectie is.

We bewijzen eerst dat f surjectief is. Kies $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ willekeurig. Kies $n \in \mathbb{N}$ zó dat $k/2^n \in \mathbb{N}$ en $k/2^{n+1} \notin \mathbb{N}$. (We delen dus k net zo lang door 2 totdat $k/2^n$ oneven geworden is). Dan geldt $k/2^n$ is oneven. Dus we kunnen een $m \in \mathbb{N}$ vinden met $2m+1 = k/2^n$ (namelijk $m = \frac{1}{2}(\frac{k}{2^n}+1)$). We vinden $f(n, m) = 2^n(2m+1) = k$.

We bewijzen dat f injectief is. Stel $(n, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $(j, i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $f(n, m) = f(j, i)$. Dus gegeven is $2^n(2m + 1) = 2^j(2i + 1)$. We tonen aan dat $n = j$ en $m = i$. Stel $n \neq j$. Er zijn 2 mogelijkheden (i) $n > j$ of (ii) $n < j$.

- In geval (i) geldt $2^n(2m + 1) = 2^j(2i + 1)$ en dus $2^{n-j}(2m + 1) = 2i + 1$. Aangezien $n > j$ geldt $2^{n-j}(2m + 1)$ is even. Maar $2i + 1$ is oneven. Dat kan niet, dus $n > j$ kan niet gelden.
- In geval (ii) kun je op dezelfde manier nagaan dat $n < j$ niet kan. Inderdaad schrijf dan $2m + 1 = 2^{j-n}(2i + 1)$, en argumenteer op dezelfde manier.

Opgave I.4.10.

Zij A een verzameling en zij $\mathcal{P}(A)$ zijn machtsverzameling. Geef een injectie $f : A \to \mathcal{P}(A)$.

(a) Herinner $\mathcal{P}(A)$ is de verzameling van alle deelverzamelingen van A. Definieer $f : A \to \mathcal{P}(A)$ door $f(a) = \{a\}$. Dan is f injectief. Inderdaad, als $a, b \in A$ zo zijn dat $f(a) = f(b)$. Dan geldt $\{a\} = \{b\}$. Dus ook $a = b$.